

**“APÚNTATE UN TANTO Y TANTEA EL PUNTO”. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS” (pp, 85-102) En: APRENDER MATEMÁTICAS. METODOLOGÍA Y MODELOS EUROPEOS. SERIE: PRINCIPIOS ACTUALIZACIÓN Y FUNDAMENTACIÓN CIENTÍFICAS DE LA METODOLOGÍA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN EDUCACIÓN INFANTIL Y PRIMARIA. SECRETARÍA GENERAL TÉCNICA. CENTRO DE PUBLICACIONES. MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA, 2007  
ISBN: 978-84-369-4427-3**

CURSO: APRENDER MATEMÁTICAS. METODOLOGÍA Y MODELOS EUROPEOS

## APUNTATE UN TANTO Y TANTEA EL PUNTO. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

José Antonio Fernández Bravo

### ***1. INTRODUCCIÓN***

### ***2. LA INVENCIÓN, COMO PROPUESTA DE MÉTODO***

### ***3. METAMODELOS Y MODELOS DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS***

#### ***3. 1. Modelos Generativos***

#### ***3. 2. Modelos de Estructuración***

#### ***3.3. Modelos de Enlaces***

#### ***3. 4. Modelos de Transformación***

#### ***3.5. Modelos de composición***

#### ***3.6. Modelos de Interconexión***

### ***4. DESDE LOS AÑOS OCHENTA***

### ***BIBLIOGRAFÍA***

## 1. INTRODUCCIÓN

Las emociones que nos presentan los alumnos cuando intentan resolver problemas matemáticos no son, generalmente, muy positivas. Empezamos, entonces, por un ligero desasosiego generado por el término “problema” y un exagerado rechazo al adjetivo

“matemático”. De las muchísimas causas que producen este efecto de repulsa, una de ellas es la falta de protagonismo del alumno en el problema en sí. Una de las actividades que más éxito ha demostrado en la intervención educativa para hacer partícipes a los alumnos, por su acción metacognitiva, es la invención-reconstrucción de situaciones problemáticas. Son ellos, y no nosotros, quienes se deben “apuntar el tanto” del problema matemático, tanto en su formulación como en su resolución. Sin embargo, resolver un problema implica demostrar su solución o ausencia de ésta y, no podríamos prescindir del razonamiento con la explicación, la verificación o la comprobación, por ello es necesario “tantear el punto” del “tanto que se han apuntado”.

Los resultados de una investigación<sup>1</sup> realizada en Didáctica de la Matemática sobre invención-reconstrucción de situaciones problemáticas señalan un incremento significativo en los alumnos de los grupos experimentales, en la exposición de técnicas y destrezas, que sobresalen por el énfasis creativo con el que se desenvuelven para la construcción y resolución de los problemas matemáticos propuestos. Se llegó a las siguientes conclusiones:

Cuánto más incompleta se presente una situación problemática, capaz de ser reconstruida por el alumno, mayor es la posibilidad que tiene de ser consciente de las relaciones que intervienen en su resolución. Las situaciones que se presentan de forma completa y terminada debilitan el aprendizaje, al ignorarse la dinámica de relaciones intelectuales que han intervenido en el proceso de su construcción.

La invención de situaciones problemáticas permite al alumno descubrir el error y reconocerlo para evitarlo en la construcción de nuevos conocimientos. La concienciación del error es, para el alumno, reflexión, y para el profesor, disminución de la ignorancia que posee sobre lo que sus alumnos desconocen. Tal conocimiento adquiere un significado que da utilidad al medio en el que se desenvuelven las relaciones de enseñanza-aprendizaje. El diagnóstico, la detección, corrección y superación de los errores, como parte legítima de los procesos de mejora en el rendimiento de la resolución de problemas matemáticos, ha surgido en un marco conceptual consistente, basado en la aplicación de metamodelos y modelos<sup>2</sup>.

## 2. LA INVENCIÓN, COMO PROPUESTA DE MÉTODO

La Metodología didáctica para el aprendizaje de la matemática considera a “la construcción” y “el descubrimiento” valores formativos.

“El simple hecho de que al resultado de un trabajo original en el campo de la investigación

---

<sup>1</sup> FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *Efectos de la invención-reconstrucción de situaciones problemáticas, en el rendimiento de los alumnos de segundo ciclo de Educación Primaria para la resolución de problemas matemáticos*. Tesis Doctoral. UNED. Facultad de Educación. Departamento de Didáctica. Publicado en CD, 1999

<sup>2</sup> Ver apartado 3, Metamodelos y modelos de situaciones problemáticas.

matemática se le llame tanto creación o invención como construcción o descubrimiento, revela toda la multiformidad de la experiencia matemática.” (Piaget y Beth)<sup>3</sup>

Albert Einstein afirmaba que plantear un problema es casi siempre más decisivo, científicamente, que resolverlo. Hay que saber muy bien dónde está la dificultad, cuál es la deficiencia que intentamos superar o los obstáculos que frenan la realización de un objetivo nuevo.

Vigostky<sup>4</sup> al relatar experiencias escolares en la Unión Soviética refleja lo positivo que es para los niños inventar situaciones a partir de los dibujos de diversos objetos en una hoja de papel. Muestra la pluralidad de alternativas que presenta un sólo dibujo ante un conjunto de sujetos, y la riqueza de la variedad de situaciones que se obtienen. Del mismo modo expone cómo a partir de una situación y dejando libertad para la expresión de preguntas, los alumnos son más conscientes de las relaciones del problema y son capaces de analizar sus propios errores.

Aizpún<sup>5</sup> juega, desde el principio de variabilidad, con situaciones capaces de alejar el estereotipo y la rutina de la clase de matemáticas en la resolución de problemas. El alumno inventa y construye, generando ideas consciente de las relaciones implícitas en la situación. La comprensión de estas relaciones se da de forma tan natural y profunda que permite la extensión a nuevas situaciones de mayor dificultad. El hecho de que estas ideas se deban, según Aizpún, a Kerschensteiner<sup>6</sup> y la escasa aplicación de ellas en la clase de matemáticas, demuestra que el reconocimiento de la teoría no implica el asentamiento en la práctica<sup>7</sup>.

---

<sup>3</sup> PIAGET, J y BETH, E.W. *Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real*. Ciencia Nueva. Madrid, 1968, pág. 128

<sup>4</sup> VIGOSTKI, L. S. *Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar*. Ed. LEONTIEV y LURIA. Moscú, 1956. Trad. Cast., E. BENÍTEZ, *Psicología y pedagogía*. Akal. Madrid, 1973

<sup>5</sup> AIZPÚN, A. *Teoría y Didáctica de la matemática actual*. Volumen 2. Vicens Vives. Barcelona, 1972

<sup>6</sup> Georg Kerschensteiner, nació y murió en Munich (1854 – 1932) Pedagogo alemán que fijó una estrecha relación entre la teoría y la práctica educativas. Sus trabajos tuvieron mucha resonancia en la primera mitad del siglo XX. KERSCHENSTEINER, G. *Esencia y valor de la enseñanza científico-natural*. Barcelona, 1930; *La educación cívica*. Barcelona 1934; *Charakterbegriff und Charaktererziehung*. Leipzig, 1919; *Autorität und Freiheit als Bildungsprinzipien*. Leipzig 1924

<sup>7</sup> “Y la experiencia dice que estos mismos enunciados (los derivados de la interpretación infantil a partir de expresiones matemáticas) son muchas veces punto de arranque de otras cuestiones importantes, como deben ser auténticamente los verdaderos. [...] En una segunda etapa, ya dirigida, no partiremos de igualdad alguna, sino que pediremos enunciados tales que para responder a la pregunta planteada hayan de realizarse operaciones fijadas; por ejemplo, pediremos enunciados que exijan una adición y una multiplicación; que exijan dos adiciones; una sustracción y una multiplicación, etc. Esta actividad permite profundizar en muchas direcciones en el estudio de las propiedades de las operaciones, porque al no precisar el orden en que se exigen un alumno puede dar como esquema de su enunciado  $(a \times b + c)$ , otro dar como esquema del suyo  $a \cdot (b + c)$ , etc., y los modos como hay que alterar un enunciado para pasar al otro motivan observaciones de los alumnos ricas en consecuencias. Este modo de proceder hace que los niños comprendan en profundidad lo que es un problema, porque los han planteado antes de tener que resolver otros que le proporciona el Maestro y así nunca son trampas engorrosas que se le presentan. [...] Después de la etapa que se ha descrito, resulta muy conveniente que los niños superpongan un problema a otro u otros varios para redactar finalmente un enunciado total. De esta manera nos encontramos con que los problemas que plantean y resuelven los niños acaban pronto por ser mucho más «difíciles» que los que suelen aparecer en las colecciones de problemas escolares. [...] Tradicionalmente, es sólo

Del mismo modo que la encuesta de “L’Enseignement Mathématique” sobre el método de trabajo de los matemáticos [Publicada por H. Fehr con la colaboración de T. Flournoy y E. Claparède (París y Ginebra, 1908)], estimuló y provocó la conferencia de Poincaré en 1909 sobre “Invención matemática”<sup>8</sup> y los trabajos posteriores de Hadamard<sup>9</sup>, pretendemos que se entienda la invención de situaciones problemáticas, como método capaz de desarrollar la actividad mental en la resolución de problemas, garantizando la autonomía de las sucesivas construcciones.

### 3. METAMODELOS Y MODELOS DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

Fernández Bravo<sup>10</sup>, encuentra seis clases de metamodelos<sup>11</sup>, y cuarenta y nueve modelos:

**GENERATIVOS.** Deben ser las primeras situaciones a las que se enfrente el alumno, aunque no tienen que ocupar únicamente esos primeros lugares. Desarrollan la confianza y seguridad de los alumnos en sí mismos. Ayudan a generar ideas y a utilizar el razonamiento lógico. La operación queda subordinada al pensamiento, del que se desprende divergencia y flexibilidad. Ayudan a percibir la estrategia como vía de solución y a buscar, a posteriori, la operación válida para dar cuerpo al proceso de resolución. El número es algo secundario. Permiten retener el desafío central a partir del cual se reflexiona. Se percibe la importancia de la ausencia de arbitrariedad en los problemas. Se desarrolla la atención, la actitud crítica, la capacidad de tolerancia, colaboración y solidaridad respecto a las ideas de los demás.

De **ESTRUCTURACIÓN.** Ayudan a estructurar mentalmente las partes que componen el

---

el Maestro quien plantea los problemas, y se le suele aconsejar que lo haga utilizando estrictamente los datos precisos. El adulto que estudia Matemáticas sabe que así aparecen también los que se le ofrecen a él y este convenio tiene como base más lo que suele llamarse elegancia de planteo que otra cosa. Pero ni en el mundo de la investigación ni en el de las aplicaciones, ni aun siquiera en el de las relaciones humanas, surgen los problemas con tal limpieza conceptual de enunciado, sino que es el propio investigador quien ha de seleccionar los datos prescindiendo de los superfluos o eliminando los contradictorios.” (AIZPÚN, A. *Teoría y Didáctica de la matemática actual*. Volumen 2. Vicens Vives. Barcelona, 1972, págs. 127-129)

<sup>8</sup> POINCARÉ, H. *El valor de la ciencia*. Espasa Calpe Buenos Aires, 1946

<sup>9</sup> HADAMARD, J. *Psicología de la invención en el campo matemático*. Espasa Calpe. Buenos Aires, 1947

<sup>10</sup> FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos*. Ciss/Praxis Barcelona, 2000

<sup>11</sup> Entendemos por "Metamodelos" cada una de las distintas clases de “modelos de situaciones problemáticas”, presentadas a la actividad del alumno, capaces de generar ideas válidas para la invención, reconstrucción, formulación, planteamiento y resolución de problemas matemáticos.

problema: Enunciado, pregunta, resolución, solución. Se percibe la importancia de cada una, la relación que tienen y la no-arbitrariedad entre ellas. Al implicar al alumno en la construcción del problema interpreta mentalmente la situación problemática, utilizando las operaciones matemáticas como instrumentos para la resolución de las estrategias elegidas; distingue la solución del problema de la resolución de éste y es capaz de estimar con razonamiento lógico la validez del resultado debido a que ha utilizado la reversibilidad de los procesos operativos como técnica de verificación. Se es consciente de que un mismo resultado se puede corresponder con diferentes situaciones planteadas; donde un alumno suma, otro resta. Del mismo modo se es consciente de que una misma operación o conjunto de operaciones da lugar a la creación de una amplia diversidad de situaciones. Se observan interesantes razones para respetar las ideas de los demás.

ENLACES. Ayudan a encontrar la concordancia lógica entre enunciado-pregunta-solución; se trabaja con variables de relación entre estas partes: variables sintácticas, lógicas, matemáticas, creencias sociales, experiencias propias. Desarrollan la atención y la prudencia en el trabajo. Evitan la dependencia de la asociación de formas lingüísticas con la aplicación de operaciones. No interviene el azar en la utilización de los datos; se percibe el significado de éstos dentro de la situación problemática. Se comprende que no todos los problemas presentan datos numéricos y que no todos los datos de un problema son numéricos.

De TRANSFORMACIÓN. Utilización de una diversidad de enfoques y pluralidad de alternativas. Hay un dinamismo de relaciones mentales que implican el desarrollo de un pensamiento matemático. Se consolidan conceptos. Se provoca la atención a los elementos con que se representan las magnitudes que intervienen en las situaciones. Utilización de método de Análisis y método de síntesis. Ayudan a la autocorrección y a establecer relaciones de semejanza y diferencia entre las estrategias de resolución de situaciones problemáticas.

De COMPOSICIÓN. Ayudan a ver el problema como un todo. Emisión de juicios a partir de relaciones múltiples. Desarrollan la memoria, la observación y la capacidad de demostración; ir hacia atrás y pensamiento reversible. Permiten la autocorrección. Consciencia de la necesidad de lectura tantas veces como sea necesaria. Utilización de método de Análisis, de síntesis y de análisis-síntesis.

De INTERCONEXIÓN. Extensión de las ideas. Apertura mental en la aplicación de los conceptos y operaciones. Desarrollo de la originalidad, imaginación y creatividad. Aportan componentes de interdisciplinariedad y transversalidad. Ayudan a reflexionar sobre la lógica que ha operado en el razonamiento del proceso de resolución de un problema y a distinguir entre lo necesario y lo suficiente.

### 3. 1. Modelos Generativos

1.- Situaciones sin número. Se presenta un problema en cuyo enunciado y pregunta no aparecen datos numéricos. Para llegar a la solución no se necesita operación alguna. \*\* *Se dejan caer, una pelota que está encima de un armario y una pelota que está encima de una silla. ¿Qué pelota llegará antes al suelo? ¿Se han dejado caer las dos pelotas a la vez? ¿Dónde has supuesto que estuviera la silla? ¿Es el armario más alto que la silla? ¿Podría estar la silla en una posición más alta que el armario?*

2.- Informaciones de las que se puede deducir algo. Se presentan informaciones, sin pregunta alguna: Puede ser una frase, una portada de un libro, un cartel publicitario, una lista de precios,... La realización de la actividad consiste en deducir ideas y clasificarlas en: lógicas -aquellas que son verdad o mentira para todos- y no lógicas; así como, posibles -muy posibles, poco posibles- e imposibles. \*\* *Roberto tiene monedas de 5 céntimos de euro y Sonia monedas de 1 céntimo de euro. ¿Quién de los dos se puede comprar más cosas?*

3.- Situaciones cualitativas. Se presenta un enunciado y una pregunta con sentido lógico pero de forma incompleta para llegar a la solución. Se va completando todo lo que se necesite en la medida en que el alumno lo vaya pidiendo. \*\* *El lunes leí las 30 primeras páginas de un libro que empecé. El martes lo acabé. ¿Qué día leí más páginas de ese libro?*

4.- Enunciados abiertos. Se le da al alumno una información: A partir de una frase, de una foto, de un dibujo, de un esquema, de un titular de un periódico, un prospecto, una programación de televisión... Su labor consiste en inventar una situación problemática en la que utilice esa idea. \*\* *Inventa un problema y resuélvelo a partir de lo que te sugiera una de estas frases: "Muchos de los accidentes son por culpa del alcohol" " Una buena alimentación ayuda a no coger mucho peso"*

5.- Problemas de lógica. No interviene el algoritmo. Utilización del razonamiento por deducción, inducción y analogía. \*\* *Ayer fue Viernes. - Dije ayer. ¿Qué día será mañana?*

## 3. 2. Modelos de Estructuración

6.- Inventar y resolver un problema a partir de una solución dada. El alumno creará el enunciado, la pregunta y el proceso que se pueda corresponder con la solución de partida. \*\* *Inventa un problema cuya solución sea 16 páginas.*

7.- Inventar y resolver un problema a partir de una expresión matemática. Creación de un enunciado y pregunta que se corresponda con el contenido de relación aplicativa de la expresión de partida. \*\* *Inventa un problema que se resuelva mediante la siguiente expresión matemática:  $(16 + 7 - 4) \times 5$*

8.- Inventar y resolver un problema cumpliendo dos condiciones: Llegar a la solución dada y aplicar la/s operación/es indicada/s. \*\* *Inventa y resuelve un problema. Operaciones (+ y -)*  
Solución: 796 Un dato numérico del enunciado no se debe utilizar en la resolución del problema -(Dato no significativo)

9.- Inventar y resolver un problema cumpliendo dos condiciones: Llegar a la solución que se nos ha indicado y utilizar (todos/no todos) los datos numéricos que se nos han dado. \*\* *Elige entre estos datos: " 315, 201, 192, 798, 405 ", para inventar un problema cuya solución sea*

597 sellos.

### 3.3. Modelos de Enlaces

10.- Expresar preguntas y responderlas a partir de un enunciado dado. La labor del alumno consiste en crear preguntas que se puedan contestar teniendo en cuenta, únicamente, el enunciado de partida.\*\* *Escribe preguntas que se puedan responder a partir del siguiente enunciado: "Sonia ha estado viendo la televisión 137 minutos. Ramón ha estado viendo la televisión 29 minutos menos que Sonia"*

11.- Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la operación. Se tiene un enunciado y preguntas en blanco. Cada una de esas preguntas lleva indicada la operación que se tiene que utilizar para obtener sus respuestas. \*\* *Escribe preguntas a partir del siguiente enunciado, fijándote en la operación que tienes que utilizar para responderlas: "Joaquín tiene dos cuadernos de Plástica. El cuaderno número 1 es para pintar y le ha costado 147 céntimos de euro. El número 2 es para recortar y le ha costado 394 céntimos de euro."* \_\_\_\_\_? Operación: Sumar; \_\_\_\_\_? Operación: Multiplicación; \_\_\_\_\_? Operación: Restar

12.- Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la expresión matemática. Se tiene un enunciado y preguntas en blanco. Cada una de esas preguntas señala la expresión matemática que se debe utilizar en el proceso de resolución.\*\* *Un señor A gana en cuatro meses 536.000 céntimos de euro. Un señor B gana en un año 1.176.000 céntimos de euro. Un señor C gana en 24 meses 4.800.000 céntimos de euro. Sabiendo que las mensualidades de cada uno son siempre iguales, escribid la pregunta, según corresponda:*

\_\_\_\_\_? (536.000 : 4) ; \_\_\_\_\_? (1.176.000 : 12) x 5  
\_\_\_\_\_? (536.000 x 3) ; \_\_\_\_\_? (4.800.000 :2)  
\_\_\_\_\_? (1.176.000 : 4) ; \_\_\_\_\_? (4.800.000 : 24) x 12  
\_\_\_\_\_? (536.000 :4) + 536.000 ; \_\_\_\_\_? (1.176.000 : 365)

13.- Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la solución. Se presenta un enunciado con preguntas en blanco. Cada pregunta tiene una solución dada.\*\* *Escribe la pregunta, según corresponda: La catedral de Sevilla se comenzó a construir en el año 1402 y se terminó en el año 1519. Su planta es rectangular. La catedral de Santiago de Compostela, en Galicia, se construyó del año 1075 al año 1128.*

\_\_\_\_\_?Sol.: 274 años ; \_\_\_\_\_?Sol.: 4.692 meses  
\_\_\_\_\_?Sol.: No ; \_\_\_\_\_?Sol.: La catedral de Santiago  
\_\_\_\_\_?Sol.: No se puede saber con los datos que se tienen

14.- Inventar un enunciado que se pueda corresponder con una pregunta dada, y resolver el problema: utilizando todos los datos del enunciado / sin utilizar todos los datos del enunciado.  
\*\* *Inventa un enunciado y resuelve el problema: ¿Cuántos libros tengo que meter en cada caja*

sabiendo que en cada caja hay un libro más que en la anterior?

15.- Inventar un enunciado que se corresponda con: una pregunta dada y una solución dada, y resolver el problema: utilizando todos los datos del enunciado / sin utilizar todos los datos del enunciado. \*\* ¿Cuántas páginas le quedan a Susana por leer? Sol.: 32

16.- Inventar un enunciado que se corresponda con: una pregunta dada y la operación/es a seguir en el proceso de resolución, y resolver el problema. \*\* Inventa un enunciado para cada una de las siguientes preguntas. Resuelve los problemas con la operación que se indica en cada caso:

¿Cuántas gallinas hay dentro del corral? Operación: Sumar

¿Cuántas gallinas hay dentro del corral? Operación: Restar

17.- Inventar un enunciado que se corresponda con: una pregunta dada y el proceso de resolución dado. \*\* Se te presenta la pregunta y el proceso de resolución de un problema. Escribe un enunciado que se corresponda utilizando tres datos numéricos, y sólo tres. ¿Cuánto costó cada regalo?

$570 - 80 = 490$  ;  $570 + 490 = 1.060$  ;

$1060 - 300 = 760$

Solución: \_\_\_\_\_ euro; \_\_\_\_\_ euro; \_\_\_\_\_ euro

18.- Inventar un enunciado que se corresponda con: una pregunta dada, la solución del problema dada y los datos numéricos dados que deben aparecer en el enunciado. Resolver el problema: utilizando todos los datos del enunciado / sin utilizar todos los datos del enunciado.\*\* Selecciona los datos numéricos que se indican para construir el enunciado de los tres problemas siguientes. DATOS: 9, 12, 6, 4, 8, 10, 7

¿ Cuántas estrellitas se hicieron para adornar la clase?

Se hicieron 48 estrellitas para adornar la clase

¿Cuántos dibujos pusieron en la pared del pasillo, entre las tres clases? Pusieron 25 dibujos

¿Cuántas excursiones hicieron los niños de tercero más que los niños de segundo? Hicieron 3 excursiones más.

19.- Inventar un enunciado que se corresponda con varias preguntas dadas. Se presentan varias preguntas. La labor del alumno consiste en crear un enunciado, y sólo uno, capaz de dar respuesta a todas y cada una de las preguntas presentadas.\*\* *Inventa un enunciado, y sólo uno, que te permita responder a estas dos preguntas:¿Cuántos minutos esperó Luis más que Arturo? ¿Cuántos minutos esperó Arturo menos que Sara?*

20.- Inventar un enunciado, y sólo uno, con el que se pueda responder, y mediante las operaciones indicadas, a todas y cada una de las preguntas dadas. Se presentan varias preguntas acompañadas de la indicación de operación/es que se tienen que aplicar para llegar a su respuesta.\*\* *Inventa un sólo enunciado para que puedas resolver las dos preguntas siguientes, atendiendo a las condiciones que se indican:¿ Cuántos pasteles había en las siete*

bandejas? Operación: X; ¿Cuántos pasteles quedaron? Operación: +

21.- Inventar un enunciado, y sólo uno, que se corresponda con: varias preguntas dadas y las soluciones que acompañan a todas y cada una de ellas. Comprobar el problema. \*\* Inventa un sólo enunciado que se corresponda con las preguntas y sus soluciones: ¿Cuántos litros de vino hay en los tres barriles? 290 litros; ¿Cuántos litros de vino hay en el barril A más que en el barril C? 10 litros; ¿Cuántos litros de vino hay en dos de esos barriles? 200 litros

22.- Inventar un enunciado, y sólo uno, en el que aparezcan los datos numéricos dados: utilizando todos en el proceso/sin utilizar todos en el proceso, que se corresponda con: varias preguntas dadas y las soluciones que acompañan a todas y cada una de ellas. \*\* Elige entre los siguientes datos para construir un sólo enunciado que se corresponda con las preguntas y soluciones dadas: 1.050, 3, 9, 12, 150

¿Cuánto dinero ha puesto cada amigo? 350 céntimos de euro; ¿Cuántas tortillas se han comprado? 3

### 3. 4. Modelos de Transformación

23.- Cambiar los datos necesarios del problema, que ya ha sido resuelto, para obtener una solución dada y distinta a la que ya se obtuvo anteriormente. \*\* Sara sale de su casa con 2.000 céntimos de euro. Gasta 600 céntimos de euro en el cine y 580 céntimos de euro en un taxi para volver a casa. Antes de coger el taxi entró en unas tiendas. Volvió a casa con 240 céntimos de euro. ¿Compró algo en aquellas tiendas? ¿Qué cambiarías del enunciado para que la respuesta a la pregunta anterior fuese: NO?

24.- Cambiar los datos del problema, que ya ha sido resuelto, para obtener la misma solución que se obtuvo anteriormente. Se parte de un problema fácil y posible de realizar por todos los alumnos. Se van cambiando los datos por otros más complejos, pero equivalentes, para que no hagan variar la solución del problema. \*\* *María tiene 1500 céntimos de euro. Su papá le da 380 céntimos de euro. Ahora María tiene mucho dinero y decide gastarse 590 céntimos de euro en pegatinas. ¿Cuántos céntimos de euro le quedan a María después de gastarse ese dinero en pegatinas? Cambia dos datos numéricos del enunciado sin que varíe la solución del problema. Cambia todos los datos numéricos del enunciado sin que varíe la solución del problema. ¿Podrías cambiar un sólo dato del enunciado sin que varíe la solución del problema?*

25.- Añadir o Eliminar información de un problema, que ya ha sido resuelto, para que la solución no varíe. \*\* Resuelve el siguiente problema y, una vez resuelto, redáctalo dejando la mínima información que te permita llegar a la solución del problema sin que ésta varíe: "Un señor, que es dueño de una tienda, tiene, actualmente, 57 años y es padre de tres hijos de edades consecutivas. La suma de las edades de sus hijos es 78 años. El primero de ellos nació cuando este señor tenía 20 años, el segundo cuando tenía 21 años y el tercero cuando tenía 22 años. ¿Qué edad tienen, actualmente, los hijos de este señor?"

26.- Cambiar los tiempos verbales en los que se expresa un problema, que ya ha sido resuelto. Resolver el nuevo problema. Observar y comparar las soluciones de ambos.

27.- Cambiar lo que sea necesario, y sólo si es necesario, de un problema, para que el proceso de su resolución, que se presenta, sea correcto. \*\* El cubo rosa pesa 8 Kg, el cubo azul pesa 12 Kg y el cubo verde pesa 15 Kg. Cuántos Kg pesan todos los cubos?  $8 \text{ litros} + 12 \text{ litros} + 15 \text{ litros} = 35 \text{ litros}$  caben en los tres cubos llenos.

28.- Averiguar el dato falso de un problema, dándoles la solución correcta. Existe un dato, y sólo uno, que no nos permite llegar a la solución expresada. \*\* Averigua el dato falso del enunciado, sabiendo que hay uno, y sólo uno, y que la solución del problema es la correcta. "En una hucha hay el mismo número de monedas de cada clase. Hay doce monedas de 20 céntimos de euro, doce monedas de 1 céntimo de euro y doce de 10 céntimos de euro" ¿Cuánto dinero hay en esa hucha? Sol.: 480 céntimos de euro

29.- Cambiar la pregunta de un problema, que ya ha sido resuelto, para que la nueva solución sea la misma que la que se obtuvo anteriormente.

\*\* Un niño tiene en su hucha tres monedas de 20 céntimos de euro, diez monedas de 5 céntimos de euro y tres monedas de 100 céntimos de euro. ¿Cuántas clases distintas de monedas tiene en su hucha?

30.- Cambiar el orden en el que aparecen las proposiciones del enunciado de un problema, que ya ha sido resuelto. Resolver el nuevo problema. Observar y comparar ambas soluciones.

31.- Cambiar la expresión afirmativa/negativa de las proposiciones de un enunciado. Se resuelve un problema en cuyo enunciado intervienen dos y solo dos proposiciones. Una vez resuelto, se niega la primera proposición, y sólo esa. Se crea un nuevo problema que se resuelve. A continuación, se niega la segunda proposición, y sólo esa. Se crea un nuevo problema que se resuelve. El último paso consiste en negar las dos proposiciones, se resuelve el problema resultante. Se observan las dificultades de precisar la solución, se comparan las cuatro soluciones.\*\* *Juan se gastó más dinero que Luis. Luis se gastó más dinero que Javier.* ¿Quién de los tres se gastó más dinero?

32.- Cambiar la conjunción por disyunción, y viceversa. Resolver los problemas. Observar y comparar las soluciones.\*\* Compraré un kilo de lentejas de 560 céntimos de euro/kilo y compraré dos kilos de judías pintas de 870 céntimos de euro/kilo o tres kilos de judías blancas de 720 céntimos de euro/kilo. ¿Cuánto dinero pagaré por esa compra?

33.- Negar las proposiciones del enunciado de un problema y cambiar la pregunta para que la solución no varíe. Los pasos son los mismos que se han seguido en el modelo 31, la diferencia consiste en que el alumno, una vez realizadas las negaciones, cree una pregunta para todos y cada uno de los nuevos problemas, tal que su solución sea la misma.

34.- Buscar la correspondencia enunciado-pregunta-solución. Se dan varios enunciados, varias preguntas y varias soluciones u operaciones, desordenadas pero que se corresponden entre sí. El trabajo del alumno consiste en buscar la correspondencia enunciado-pregunta-solución.

35.- Mezclar las preguntas de dos problemas. Se presentan dos enunciados de dos problemas distintos. Las preguntas que se corresponden con cada uno de estos enunciados se han mezclado generando un sin sentido de palabras. La realización de la actividad consiste en

resolver los dos problemas.\*\* *Se han mezclado las preguntas de los dos problemas siguientes. Descífralas y resuelve los problemas.* "Para ir de excursión, 115 niños contratan dos autobuses. En uno de esos autobuses viajan 57 niños" "En la biblioteca hay 369 libros de cuentos y 235 libros de poesía" ¿Cuántos en la biblioteca viajan hay ¿ en los otro cuentos? niños Cuántos libros de autobús y de poesía?

36.- Cambiar los datos de un problema, o problemas, dentro del mismo, o entre ellos. Se advierte al alumno que todos o algunos de los datos que aparecen se han cambiado y no ocupan el lugar que les corresponde. Su labor consiste en dar respuesta a la pregunta del problema o problemas.

\*\* Ningún dato numérico del siguiente problema está donde le corresponde. Resuelve el problema. "Tengo 120 céntimos de euro. Una bolsa de gusanitos cuesta 80 céntimos de euro. Una bolsa de patatas cuesta 200 céntimos de euro. Una bolsa de pipas cuesta 75 céntimos de euro. Me he comprado la bolsa de pipas, aunque era lo más caro, y otra cosa. Me ha sobrado dinero. ¿Qué me he comprado?"

37.- Mezclar el/los enunciado/s de un/os problema/s. Se presenta un problema cuyo enunciado es un sin sentido porque se ha desordenado, o se presentan dos enunciados mezclados. Se da al alumno lo necesario para que pueda ordenarlos sin ambigüedad alguna y resolver el/los problema/s. \*\* *Se han mezclado dos enunciados. Sabiendo que los dos problemas tienen la misma solución, escribid los enunciados para que se correspondan con sus respectivas preguntas.* "Ayer de lectura 682 céntimos de euro más que Julio. Cada 87 céntimos de euro Javier tiene 32. Pagué bolígrafo con cuatro libros. Julio un libro y compré. 6 me costó cada billete de 25 céntimos de euro monedas de 5000 monedas de 5 céntimos de euro y 30 bolígrafos tiene céntimos de euro" ¿Cuánto dinero me devolvieron?¿Cuántas céntimos de euro tienen entre los dos?

38.- Mezcla de los procesos de resolución de dos problemas. Se presentan dos problemas distintos. Se mezclan los procesos de resolución. La labor del alumno consiste en identificar cada proceso con el problema correspondiente.

39.- Cambiar las preguntas de un problema por una, y sólo una. Se presenta un problema con varias preguntas. La labor del alumno consiste en buscar una sola en cuyo proceso de resolución se contesten las demás.

### 3.5. Modelos de composición

40.- Componer el/los enunciado/s de un/os problema/s a partir de todos/algunos de los datos que se ofrecen, y resolver la situación problemática. Se presentan enunciados tal que desde esa forma de presentación se encuentran incompletos para dar respuesta a su pregunta. Se presentan fuera del problema una serie de datos. La realización de la actividad consiste en elegir el lugar necesario de los datos para resolver el problema. \*\* Necesitamos un detective numérico. A los dos problemas siguientes se les han borrado los datos. Se sabe cuales son, pero no dónde estaban. Juega a ser detective colocando los datos según corresponda. DATOS: 3 / 21/ 18 / 6 / 8 / 108 / 48

A) En..... muebles, exactamente iguales, hay un total de .....estanterías. ¿Cuántas estanterías hay en.....de esos muebles? Sol.: Un dato del problema B

B) Un panadero forma dos filas de cestas de pan. Poniendo en la primera fila menos cestas que en la segunda. En la primera fila pone.....cestas con.....barras de pan en cada una de ellas y en la segunda fila pone.....cestas con .....barras de pan en cada una de ellas. ¿Cuántas filas de pan hay en la primera fila de cestas más que en la segunda? Sol.: Un dato del problema A

41.- Completar los datos del enunciado de un problema a partir del proceso de resolución. Se presenta un problema resuelto, de cuyo enunciado se han borrado los datos y se ha dejado el espacio correspondiente para que el alumno lo complete según corresponda. **\*\* Escribe los datos que faltan en el enunciado para que el problema esté bien resuelto: " Sofía se compra ..... sobres de cromos. En cada sobre tienen que venir ..... cromos, pero por un error de fábrica a Sofía le han dado ..... sobres vacíos. ¿Cuántos cromos tiene Sofía?"**  
 $17 - 3 = 14$  ;  $14 \times 7 = 98$  Sofía tiene 98 cromos

42.- Completar los datos del enunciado de un problema a partir de la solución de éste. Se presenta un problema indicando su solución. De su enunciado se han borrado los datos y se han dejado los espacios en blanco. El alumno completará el enunciado según corresponda. **\*\* Completa lo que falte en el enunciado, según corresponda, para que las respuestas sean correctas: " A una panadería llevan 87 barras de pan sin sal y..... barras de pan con sal. La panadería vende 182 barras de pan con sal y vende ..... barras de pan sin sal." ¿Cuántas barras ha vendido en total la panadería? 251 barras; ¿Cuantas barras llevaron a la panadería? 282 barras**

### 3.6. Modelos de Interconexión

43.- Inventar un problema con un vocabulario específico dado, y resolverlo. Se le da al alumno el vocabulario que debe utilizar en la invención. **\*\* Inventa un problema en el que incluyas el siguiente vocabulario, y resuélvelo. Enunciado: "doble", "radiador" , "abril" Pregunta: "mes" , "día", "agua"**

44.- Inventar un problema con: un vocabulario específico y la operación/es que debe utilizarse para su resolución.\*\* Inventa un problema en el que incluyas el siguiente vocabulario, y resuélvelo mediante una multiplicación y una suma. Enunciado: "doble", "radiador" , "abril" Pregunta: "mes" , "día", "agua"

45.- Inventar un problema con: un vocabulario específico y la solución dada. \*\*Inventa y resuelve un problema que cumpla las siguientes condiciones: Enunciado: "tecnología", "manufacturados", "bienestar" Pregunta: "obreros", "exportación" Sol.: 1.500 Euros

46.- Resolver problemas que se presentan de forma completa, cuya resolución favorezca la aplicación de los conceptos, operaciones y relaciones lógicas a las necesidades habituales de desarrollo personal, convivencia y relación con el entorno: con solución única, sin solución definida, con varias soluciones. **\*\* Un matrimonio va al mercado. Este matrimonio tiene cuatro hijos y comen, ahora doce kilos de naranjas por semana, ni más, ni menos; sólo doce. Hay una oferta de naranjas de la clase A: Una caja de 40 kilos 3840 céntimos de euro. Les**

parece una oferta interesante cuando comparan el precio de las naranjas de la clase B: Una bolsa de 8 kilos 1280 céntimos de euro. Se sabe que las naranjas de la clase B son mejores que las naranjas de la clase A. Se sabe que las naranjas de cualquier clase duran exactamente dos semanas. Este matrimonio está indeciso, quiere tardar el mayor tiempo posible en volver a comprar naranjas y ahorrar el mayor dinero posible en la compra que hagan de naranjas. Podrías aconsejarles: naranjas de la clase A o naranjas de la clase B?

47.- Seleccionar la información necesaria mediante la consulta de documentación. Se presenta una pregunta que, para su contestación, se requiere la consulta de diccionarios, textos, enciclopedias,... o, simplemente, salir al patio, husmear en los listados de alumnos del colegio,... para recoger la información necesaria. Como nuestros alumnos pertenecen al segundo ciclo de la Educación Primaria, es imprescindible facilitar el éxito de la búsqueda, en la que muchos de ellos perderían el tiempo sin rentabilizar el esfuerzo. Para ello, se pone a disposición del alumno una serie de fichas elaboradas por el profesor -adaptadas, en número y contenido, a la edad del alumno-, entre las que se pueda seleccionar y extraer los datos necesarios para resolver el problema.

48.- Resolver un problema que se presenta de forma distinta a la habitual. Una poesía, un caligrama, lenguaje gráfico: tablas, diagramas; un cuento breve,...

\*\* ¿En qué número está pensando el poeta?

Mi cabeza está pensando, / bajo el sol y con sombrero, / un número curioso. ¿Quién lo adivina el primero? / Si lo divido por dos, / el resultado es par / y también menor que diez./ Juega conmigo a pensar, / que al dividirlo por tres / dos menos me quedarán.

49.- Relación entre lógica y matemática.

\*\*¡Qué raras son estas calles! En una calle y sólo en una todos los números son números pares. En la calle A: No todos los números son pares; B: Algunos números son pares; C: Ningún número es par; D: Son pares todos los que son pares; E: Dos números suman 57; F: Si sumo los números de esta calle dos a dos siempre me da un número par; G: No hay ninguno que haya en la calle C; H: Todos los números se pueden dividir exactamente por dos y también todos se pueden dividir exactamente por tres. ¿Qué letra representa a la calle en la que todos los números son pares?

## 4. DESDE LOS AÑOS OCHENTA

Desde los años ochenta (Hosford, Lesh, Landau, Hamilton y Shoenfeld, entre otros)<sup>12</sup>, la resolución de problemas constituye una importante reflexión como tarea escolar. Podríamos señalar sus comienzos significativos en los congresos internacionales de educación matemática, particularmente en Adelaida (ICME-4, 1984) y Budapest (ICME-5, 1988), donde se convirtió en una corriente esencial para poner en práctica tratamientos didácticos enfocados a procesos específicos de resolución. En esta década fue objetivo principal de la enseñanza de la matemática, según la recomendación del documento *An agenda for action* publicado por la Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos (National Council of Teachers of Mathematics). Desde entonces, ha generado una inquietud de intensa búsqueda didáctica para evitar las numerosas dificultades que presentan nuestros alumnos en la resolución de problemas matemáticos.

Todo planteamiento práctico, reconocido por la enseñanza en el aprendizaje de la matemática, apoya, al menos sus procesos, en firmes argumentos que se pueden inferir fácilmente de probadas teorías; dilatados esfuerzos y años de investigación que giran en torno a un objetivo central: mejorar el rendimiento de los alumnos en la resolución de problemas matemáticos<sup>13</sup>.

*“Nada hay mas importante que ver los caminos de la inventiva, que son, en mi opinión, más importantes que las invenciones mismas” (Leibniz )<sup>14</sup>*

---

<sup>12</sup> HOSFORD, P.L. *What we know about teaching*. Association for Supervision and Curriculum Development. Alexandria, 1984; LESH, R; LANDAU, M. y HAMILTON, E. *Acquisition of Mathematics Concepts and Proceses*. Academic Press. New York, 1983; SHOENFELD, A. Ideas y tendencias en la resolución de problemas. En *La Enseñanza de la matemática a debate*. MEC. Madrid, 1985

<sup>13</sup> SÁNCHEZ HUETE, J. C. y FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *La Enseñanza de la matemática. Bases psicopedagógicas y fundamentos teóricos en la construcción del conocimiento matemático y la resolución de problemas*. Editorial CCS. Madrid, 2003

<sup>14</sup> LEIBNIZ, G. W. *De l'horizon de la doctrine humaine y La restitution universelle*. Edicion de Michel Fichant. Paris, 1991, pág 27

# BIBLIOGRAFÍA

AIZPÚN, A. *Teoría y Didáctica de la matemática actual*. Volumen 2. Vicens Vives. Barcelona, 1972

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *Efectos de la invención-reconstrucción de situaciones problemáticas, en el rendimiento de los alumnos de segundo ciclo de Educación Primaria para la resolución de problemas matemáticos*. Tesis Doctoral. UNED. Facultad de Educación. Departamento de Didáctica. Publicado en CD, 1999

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *Técnicas creativas para la resolución de problemas matemáticos*. Ciss/Praxis Barcelona, 2000

HADAMARD, J. *Psicología de la invención en el campo matemático*. Espasa Calpe. Buenos Aires, 1947

HOSFORD, P.L. *What we know about teaching*. Association for Supervision and Curriculum Development. Alexandria, 1984

KERSCHENSTEINER, G. *Esencia y valor de la enseñanza científico-natural*. Barcelona, 1930; *La educación cívica*. Barcelona 1934; *Charakterbegriff und Charaktererziehung*. Leipzig, 1919; *Autorität und Freiheit als Bildungsprinzipien*. Leipzig 1924

LEIBNIZ, G. W. *De l'horizon de la doctrine humaine y La restitution universelle*. Edición de Michel Fichant. Paris, 1991

LESH, R; LANDAU, M. y HAMILTON, E. *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Academic Press. New York, 1983

PIAGET, J y BETH, E.W. *Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real*. Ciencia Nueva. Madrid, 1968

POINCARÉ, H. *El valor de la ciencia*. Espasa Calpe Buenos Aires, 1946

SÁNCHEZ HUETE, J. C. y FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. *La Enseñanza de la matemática. Bases psicopedagógicas y fundamentos teóricos en la construcción del conocimiento matemático y la resolución de problemas*. Editorial CCS. Madrid, 2003

SHOENFELD, A. *Ideas y tendencias en la resolución de problemas*. En *La Enseñanza de la matemática a debate*. MEC. Madrid, 1985

VIGOSTKI, L. S. *Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar*. Ed. Leontiev y Luria. Moscú, 1956. Trad. Cast., E. Benítez, *Psicología y pedagogía*. Akal. Madrid, 1973