**LA MAYÉUTICA Y EL APRENDIZAJE DE LA PROBABILIDAD**. (INVESTIGACIÓN SOBRE LA INFLUENCIA DE LA METODOLOGÍA) EDUCACION Y FUTURO. REVISTA DE INVESTIGACION APPLICADA Y EXPERIENCIAS EDUCATIVAS VOLUMEN: 17. pp: 89-104 PÁGINAS: 16 EDITORIAL: CENTRO UNIVERSITARIO DE ENSEÑANZA SUPERIOR DON BOSCO. UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID PAIS: ESPAÑA FECHA: OCTUBRE 2007 ISSN: 1576-5199

# LA MAYÉUTICA Y EL APRENDIZAJE DE LA PROBABILIDAD. INFLUENCIA DE LA METODOLOGÍA

***José Antonio Fernández Bravo***

## RESUMEN

Este estudio analiza, a través de una Investigación-Acción, la influencia que tiene en el aprendizaje de la Matemática la metodología como variable educativa. Centrándonos en la Educación Secundaria Obligatoria, estudiamos diferencias entre los resultados obtenidos por la aplicación de una metodología de las *preguntas, el ejemplo y el contraejemplo* (Mayéutica socrática), frente a una metodología de *la información, de las respuestas, de las afirmaciones incuestionables*. Los datos obtenidos serán relevantes para reflexionar sobre la enseñanza de la matemática, considerando las particularidades de los procedimientos didácticos y las bases metodológicas utilizadas. El análisis de los resultados señala que una metodología Activa favorece la correcta adquisición y aplicación de los conceptos trabajados y un mayor desarrollo afectivo-social.

**Descriptores y palabras clave:** Investigación-acción. Probabilidad. Educación Secundaria. Método de enseñanza. Didáctica de la Matemática. Mayéutica.

**Key words:** Investigation-Action. Probability. Secondary Education. Teaching Method. Teaching of Mathematics. Mayéutica.

## MARCO DE CONTEXTO Y JUSTIFICACIÓN

Se estudia la influencia de la metodología de la *pregunta* a través del diseño y desarrollo de un programa para la iniciación del aprendizaje de la Probabilidad, en el primer ciclo de Educación Secundaria Obligatoria. Los principios de la metodología trabajada son dos: Uno, la necesidad en el aprendizaje de que el alumno comprenda, en primer lugar, para después, y sólo después, enunciar y simbolizar lo que se ha comprendido; dos, la asimilación del concepto con la profundidad del grado que señale la ciencia del saber a la que éste pertenece, a través de la seguridad y capacidad del alumno, mediante precisos desafíos, ejemplos y contraejemplos, sin que el profesor advierta con "bien" o "mal" la alternativa de participación en la diversidad de las respuestas.

## *Justificación del estudio, aproximación fenomenológica*

- La epistemología de los fundamentos del hacer matemático es la misma para cualquier edad en el curso del aprendizaje; como son los mismos los principios que la constituyen en la mente del alumno y los parámetros que definen la estructura de sus ejes directores. Lo que cambia, sintonizando con la capacidad intelectual, son las situaciones, los modelos y los instrumentos. La matemática o se hace, o no se hace; independientemente de la edad o el contenido expresado. Se puede hacer matemática en la introducción del número cardinal, con cinco años, y se puede dejar de hacer matemática, severa represión, aunque estemos trabajando con integrales. Desde el propósito que merece la objetividad no se puede distinguir la matemática por elemental y fundamental. No es el contenido un pilar para el asentamiento lógico de la Didáctica de la Matemática, sino el ajuste de la relación contenido-sujeto, dentro de su desarrollo.

- A cualquier edad importa el hacer con fundamentos[1]... ¿Cuál es en pocas palabras el resultado final de nuestra reflexión? Que los elementos de matemáticas deberían tratarse como el estudio de un conjunto de ideas **fundamentales**, cuya importancia pueda apreciar el estudiante inmediatamente... Este resumen puede resumirse a su vez en un principio esencial: ***"simplificar los detalles y resaltar los principios y las aplicaciones importantes"*** El pensamiento no actúa con lo que nos han enseñado, sino con lo que hemos aprendido; no es, por tanto, cuantificable la enseñanza, sino el aprendizaje.

- El éxito de la enseñanza depende, tanto de su configuración, como de la capacidad del profesor o profesora para mejorar la complejidad de un proceso de enseñanza-aprendizaje y resolver problemas prácticos.

- El análisis reflexivo de la experiencia del aula muestra que no hay aprendizaje donde no haya desafío; donde el alumno no pueda jugar con las respuestas antes de escoger una de

[1].- Whitehead, en un ensayo de 1912 "Mathematics and liberal Education", publicado en Essays in Sciencie and Philosophy, decía que "Las matemáticas (se refiere a la enseñanza de la matemática)...deben ser depuradas de todo elemento que sólo pueda justificarse de cara a estudios posteriores. No puede haber nada más destructivo para una verdadera educación que el gastar largas horas en la adquisición de ideas y métodos que no llevan a ningún sitio... La sola idea de aprender tiene un sentido muy extendido de aburrimiento. Yo lo atribuyo a que a los estudiantes se les enseñan muchas cosas simplemente en el aire, cosas que no tienen ninguna coherencia con los pensamientos que surgen naturalmente en cualquier persona que viva en este mundo moderno, independiente de que sea o no un intelectual.

ellas; donde no exprese distintas conjeturas hasta llegar a válidas conclusiones; donde no haya diálogo, ni observación, ni dinámica de relaciones conceptuales; donde no se permita la equivocación, ni la expresión con las propias palabras de las distintas experiencias; donde no puedan inventar una trascripción simbólica de lo que han comprendido; donde el profesor imponga desde su propio estatuto las verdades admitidas indicando el acierto o error que construye el rechazo al abrigo de la participación, de la motivación, del interés y el gusto[2] por la matemática; conquistando el profesor el concepto -no el alumno-, dogma entonces reservado al pragmatismo de la verdad sostenida. *"El maestro, como tal maestro, no era el hombre que investigaba la verdad, sino el que la poseía y la enseñaba; el alumno era el profano, el lego, que sólo tenía que poner de su parte lo estrictamente necesario para recibirla y retenerla... La enseñanza perdió su carácter indagativo pero como la ciencia no pudo perderlo, apartáronse una de otra más o menos amigablemente"*(Giner de los Ríos, 1973:91)

## *Probabilidad: breve evolución en la historia de la matemática*

Se sostiene que la historia de la Matemática plantea una nueva relación con el conocimiento matemático en tanto que ella es incorporada significativamente al proceso de producción de conocimientos y de su enseñanza. Se admite (Guyot, Cerizola y Giordano, 1993)[3] que "*la consecuencia inmediata de la aceptación de este hecho se vislumbra en las prácticas de transmisión del conocimiento, en cuanto romper con rígidas exigencias que poco tienen que ver con los procesos del pensamiento en su faz creativa o reproductiva"*

Los primeros problemas sobre probabilidad aparecen con Galileo[4], sobre el juego de dados. Sin embargo, los inicios del cálculo no los encontramos hasta el trabajo de Huygens, *De ratiociniis in*

---

[2] El gusto por la Matemática no suele venir dado por el camino de la facilidad, sino que es proporcional al esfuerzo utilizado en la superación del reto *"¿Quién recuerda con satisfacción haberse enfrentado a una complicación, aparentemente imposible, y acertar con el enigma de su resolución? (…) hay profesores que consiguen en sus alumnos tal sensación"* (Atrio, Bandera y Sánchez, 2001, 4, p.35)

[3].-Proyecto de Investigación, nº 4-1-8703. LAE. Universidad Nacional de San Luis (Argentina). Publicado en el artículo "Matemática e historia: una articulación para la enseñanza". Enseñanza de las Ciencias, 1993, Número Extra (IV Congreso), p. 329

[4] Galileo Galilei (1564-1642) resolvió el siguiente problema: con tres dados, demostrar que el número 10 aparece más frecuentemente que el 9. Así, en los 216 casos posibles, Galileo encuentra que 27 son favorables al número 10, contra 25 favorables al número 9. Aún no se disponía de una definición precisa de probabilidad, enunciada por vez primera por el francés Pierre Simon de Laplace (1749-1827)

*ludo aleae*[5], de 1658, la correspondencia[6] entre los grandes matemáticos Pascal y Fermat[7] en 1654 y, sobre todo, el *Ars Conjectandi*, de Bernoulli, del que se puede decir que constituye, si exceptuamos el de De Moivre[8], el principal tratado escrito sobre el tema hasta la obra laplaciana.

Laplace[9] publicó lo que constituye el gran tratado de este primer período de la historia de las probabilidades, titulado *Théorie Analytique des probabilités*, en primera edición en 1812 y en última, en 1820, volviéndose a publicar en 1866 en la edición de sus obras completas.

## OBJETIVOS DE LA APLICACIÓN DEL PROGRAMA

### Objetivos generales que se persiguen

1. Estudiar la influencia de la metodología en el aprendizaje de la probabilidad en ESO.
2. Analizar la orientación de la enseñanza de la probabilidad y otros temas, a partir de las conclusiones obtenidas y sugerir, en su caso, procedimientos educativos.

### Objetivo específico del diseño

---

[5] Huygens, C.: De Ratiociniis in Ludo Alae. En Mora Charles, M. S.(1989)

[6] Esta correspondencia se encuentra en las Oeuvres de Fermat (editadas por P. Tannery y C. Henry, volumen II, 1904) Citado por Bell (1948)

[7] Según Bell (1948) "Los verdaderos fundadores de la teoría matemática de la probabilidad fueron Pascal y Fermat, quienes desarrollaron los principios fundamentales de los problemas en una interesante y abundante correspondencia durante el año 1654. Las cartas muestran que Pascal y Fermat participaron igualmente en la creación de la teoría. Sus soluciones correctas de los problemas difieren en detalles, pero no en principios fundamentales"

[8] De Moivre (Francia, 1667- Londres, 1754), estudió los principios de cálculo de probabilidades y resolvió numerosos problemas. En su obra *La doctrina de las suertes* (1718) expone la probabilidad binominal o distribución gaussiana, el concepto de independencia estadística y el uso de técnicas analíticas en el estudio de la probabilidad. .

[9] En su obra de divulgación *Essai Philosophique sur les Probabilitiés*, Laplace (1814:24) escribe: *"Todos los acontecimientos, incluso aquellos que por su insignificancia parecen no atenerse a las grandes leyes de la naturaleza, no son sino una secuencia tan necesaria como las revoluciones del sol. Al ignorar los lazos que los unen al sistema total del universo, se los ha hecho depender de causas finales o del azar, según que ocurrieran o se sucedieran con regularidad o sin orden aparente, pero estas causas imaginarias han ido siendo descartadas a medida que se han ido ampliando las fronteras de nuestro conocimiento, y desaparecen por completo ante la sana filosofía que no ve en ellas más que la expresión de nuestra ignorancia de las verdaderas causas"*[9] Laplace expone por primera vez su concepción probabilista del conocimiento, frente a la concepción más bien determinista de la naturaleza en cuya defensa se había destacado, en la cuarta de las memorias que dedica al tema de la probabilidad, presentada ante la Academia de Ciencias de Paris en 1773, poco antes de su ingreso en ella, y titulada *Recherches sur l'intégration des équations of différentielles aux differences finies et sur leur usage dans la théorie des hasards* (Obras completas, VIII, pp.279-321). En ella escribe en efecto, por primera vez: *"Debemos a la debilidad de la mente humana una de las teorías más delicadas e ingeniosas: la ciencia del azar o de las probabilidades"* (Ibíd., p. 114)

El objetivo es favorecer en el alumno una disposición para la investigación y el descubrimiento de los conceptos, desarrollando factores cognitivos, sociales y afectivos. La observación, la imaginación, la intuición y el razonamiento formarían parte de una competencia cognitiva. El rigor crítico, la curiosidad científica y el gusto e interés por el aprendizaje de la probabilidad, subrayarían factores sociales y afectivos. El aprendizaje significativo es la base fundamental en la que se apoya el objetivo del diseño, como incorporación sustantiva, no arbitraria y no verbalista de nuevos conocimientos por parte del alumno, en la estructura cognitiva. Así como un esfuerzo deliberado por relacionar los nuevos conocimientos con conceptos de nivel superior. *"Si el alumno no tiene la intención de ir más allá de un memorización literal, el resultado de su aprendizaje será una repetición memorística y carente de significad" (*Ausubel, Novak y Hanesian, 1983).

## SOBRE EL DISEÑO Y DESARROLLO DEL PROGRAMA

**El estudio se enmarca en un proceso de Investigación-Acción: Se parte de una necesidad observada en cursos anteriores sobre la dificultad presentada por los alumnos en la correcta aplicación de los conceptos básicos sobre probabilidad (laplaciana). Se diseña un programa actualizando la hipótesis de la metodología como variable independiente. Se evalúa el programa y se obtienen conclusiones para la acción.**

Todas las actuaciones del diseño se apoyan en los mismos fundamentos; respetan, desde lo posible y hacia lo deseable: las experiencias del alumno; una situación modelo de percepción para trabajar el concepto o la relación; el desafío o conjunto de desafíos como parte activa de la intelectualización; los ejemplos y contraejemplos necesarios para la verificación o refutación de las conclusiones obtenidas. Esto supone tener presente, y en todo momento, la rica espontaneidad del aula, que habrá que conducir o recoger, adaptándola, como medio, a la actividad que estemos desplegando. Tal conducción o recogimiento obligará al profesor a extender la actividad, a resumirla o a crear otras intermedias. En definitiva, a tener en cuenta que los imprevistos de las respuestas que escuchemos en el aula no son obstáculos, sino caminos abiertos a los que hay que dar forma creativa[10] en función del objetivo.

Si estas estrategias, para construir el conocimiento y conquistar los conceptos, se aceptan con el celo autoritario que evade una apertura a la diversidad, implicará en el aprendizaje una sujeción

[10] La Profesora Josefa Zaballos (2006 : 175) escribe: “La misión del educador es ayudar a los alumnos a encontrar respuestas a los grandes interrogantes de la vida. Despertar la inquietud de crear, preguntar (…) Optar por la creatividad es aceptar los nuevos retos que nos presenta el futuro”

desfavorable, transformando los resultados previstos en otros derroteros que nos llevarán a dar un contenido sin que se obtenga conocimiento.

## *El desarrollo del programa se ha realizado en cuatro fases:*

*Descripción:* Registro de lo que ha ido sucediendo.
*Reflexión:* Efectos y consecuencias que desencadena la metodología llevada a cabo en la Unidad Didáctica.
*Contraste*: Comparación y análisis de los resultados obtenidos en las fases anteriores.
*Proyección*: Conclusiones sobre el conjunto del proceso.

### Diseño del programa

De manera sucinta y esquemática señalaremos las etapas de la estructura pedagógica en las que se apoyan las distintas intervenciones:

- Etapa de Elaboración

Etapa de observación, de formulación de preguntas, de contrastación. El alumno se familiariza con los conceptos previos necesarios para poder conquistar el nuevo concepto mediante vías de investigación y descubrimiento.

- Etapa de Enunciación

Comprender, primero, para enunciar después, es el principio fundamental que diferencia la intervención constructiva de la informativa. De ahí, que esta etapa sea la siguiente -inevitablemente respecto a las bases metodológicas-. Se construía el enunciado, nombre o simbolización de lo que se había comprendido en la etapa de elaboración.

- Etapa de Abstracción

Etapa de aplicación de los conceptos adquiridos a un conjunto de actividades. Se persigue la vinculación del pensamiento como creación y relación de nuevos contenidos; en definitiva, extender el contexto de la validez del conocimiento adquirido.

**Algunos ejemplos de los modelos didácticos utilizados para el descubrimiento de los conceptos: intervención educativa**

Objetivo: Observar fenómenos en los que no interviene el azar para intelectualizar criterios de diferenciación.

Matemática: Suceso seguro. Suceso imposible.

Material: Una caja con fichas o tarjetas de colores: rojo, amarillo y azul. Regletas.

**Actividad uno**

El profesor tendrá una caja que contenga fichas rojas, y solo rojas. El profesor informará a los alumnos del contenido de dicha caja y hará que sea comprobado por ellos mismos.

- Profesor: "Vais a cerrar los ojos. Yo cogeré una ficha del interior de esta caja. Se trata de ver quién adivina el color de la ficha que he cogido"

(Los alumnos se ríen)

- P: ¿Por qué os reís?
- Alumnos: No tiene sentido, siempre acertaremos.
- P: ¿Por qué, si vais a tener los ojos cerrados y no vais a ver la ficha que he cogido?
- A: No hace falta. Todas las fichas son de color rojo.
- P: Pero, como tenéis los ojos cerrados podría sacar de la caja una ficha de color amarillo.
- A: Eso es imposible.
- P: ¿Por qué?
- A: Porque en la caja no hay fichas amarillas. Es como si tiramos un dado y decimos que puede salir el número siete; tampoco tendría sentido.
- P: Esta bien, quitaré de la caja todas las fichas rojas y meteré en ella fichas amarillas. Cerrad los ojos.

(No cierran los ojos, dicen que "pasaría lo mismo”)

- P: No entiendo que es eso de " lo mismo". (Feedback + )
- A: Que pasa lo mismo que si hubiese rojas.
- P: Entonces la que saque será roja. (Contra-ejemplo)
- A: No, amarilla.
- P: Pero, habéis dicho que pasa lo mismo que con las rojas.

(En este momento fueron conscientes del pensamiento relacional respecto al suceso seguro, como anteriormente lo fueron respecto al suceso imposible.)

- P: No entiendo muy bien lo que queréis decirme. Decís que es lo mismo, cuando el material utilizado es distinto.

- A: Lo que es igual es la situación de sacar, porque... (Escuché atentamente. Había una dificultad de expresión, aunque no de comprensión. Se había creado, por tanto, la necesidad de enunciar lo que se había descubierto)

- P: Supongamos que tenemos un dado en la que todas sus caras están marcadas por un punto. Si se lanzase este dado, ¿qué es lo que diríais que saldría, para acertar con toda seguridad?

- P: Poned algún ejemplo de situaciones en las que se acertase con plena seguridad.

(No hay dificultad alguna: Sacar bola roja de una bolsa en la que todas sus bolas son rojas; sacar número par de un dado en las que todas sus caras tienen un número par;...)

- P: A estas situaciones que me habéis expresado se les llama SUCESO SEGURO. (Etapa de enunciación)

- P: Supongamos que tenemos las diez cartas del palo de oros de una baraja española, y sólo esas. ¿Cómo llamaríamos al suceso sacar una carta de oros?

- A: Sería suceso seguro.

- P: ¿Cómo llamaríamos al suceso sacar una carta de copas?

- A: Eso es imposible.

- P: Entonces, le llamamos SUCESO IMPOSIBLE

- P: ¿Cómo llamaríamos al suceso "sacar el as de oros"?

(Este desafío produjo una auténtica interacción. Después de mucho diálogo se llegó a la conclusión de que este suceso no era ni suceso seguro, ni suceso imposible (deducción importante; podemos observar cómo se va construyendo el conocimiento). Seguro e imposible se han presentado como contrarios, tenía que descubrir el alumno que aún siendo contrarios no son complementarios. La intercomunicación a partir del desafío presentado permitió el trabajo de una matemática cualitativa en muchos conceptos de la teoría de la probabilidad)

Este desafío marcaba el final de una actividad y el principio de otra.

Objetivo: Percibir los grados de posibilidad de un suceso.

Matematizar el cálculo del grado de posibilidad.

Matemática: Suceso probable. Regla de Laplace.

Material: Varias barajas españolas. El material de la actividad anterior.

**Actividad dos**

Introduzco en la caja una ficha roja y una ficha amarilla.

- P: Voy a extraer una ficha de la caja. Cerrad los ojos.

¿De qué color es la ficha que he sacado?

(Diversidad de opiniones: Unos, dicen roja. Otros, amarilla. Les enseño la ficha y hago que levanten la mano aquellos que han acertado. Abro un diálogo con todos los alumnos afirmando que para los que han acertado el suceso es seguro. Perciben perfectamente que aún acertando no es seguro, sino posible; que no es el acierto el que produce la seguridad sino que es la seguridad la que produce el acierto. Y que tienen tantas posibilidades de acertar cómo de errar)

- P: Decidme, ¿qué es, con seguridad, lo que puedo sacar?

(No hay dificultad. Me dicen que una ficha de color rojo **o** una ficha de color amarillo)

- P: Entonces, decimos que el suceso seguro es sacar rojo o sacar amarillo.
- P: Si al suceso seguro llamo UNO y lo represento con este número: 1, ¿cómo podría llamar al suceso: sacar ficha roja?
- A: Un medio.
- P: ¿Por qué?
- A: Porque hay amarillo y rojo.

(Atento a esta expresión, fue necesario crear un contra-ejemplo para conducir una percepción clara y rigurosa. Introduzco en la caja una ficha de color rojo y dos fichas de color amarillo)

- P: ¿Cuál es el suceso seguro?
- A: Sacar rojo o amarillo.
- P: Al suceso seguro siempre llamaré UNO. ¿Cómo llamo al suceso sacar rojo?

(Todos responden un medio. Yo, callo. Jugamos con ese modelo. Pronto se dan cuenta que tiene más posibilidades de acertar el que elige amarillo. Advierten que al suceso sacar rojo le tengo que llamar "un tercio", y no, "un medio" como antes habían asegurado. Percibieron intuitivamente el espacio muestral. El nombre numérico del suceso no depende de las propiedades de los elementos sino del total de elementos y sus propiedades. Todo esto fue descubierto por los alumnos, mediante desafíos ejemplos y contra-ejemplos)

Para asegurar la perfecta comprensión ideé un juego: Dividí la clase en dos grupos. Un grupo jugaría con la palabra SI y otro grupo jugaría con la palabra NO. En la caja introduje una ficha amarilla, una ficha roja, y una ficha verde. Cerraban los ojos. Yo sacaba una ficha que no era vista por ellos. Los que jugaban con SI, tendrían que adivinar el color de la ficha que había sacado utilizando esa palabra, por ejemplo: "Sí es verde". Los que jugaban con NO, dirían, por ejemplo: "No es amarilla". Se generaron estrategias con fuertes argumentos lógicos en la práctica de este juego. Y pronto, los que jugaban con SI protestaron firmemente asegurando que los contrincantes tenían más posibilidades de ganar. Los del Si jugaban con un tercio de posibilidades, mientras que los del No, según ellos, jugaban con dos tercios. Descubrieron, sin dificultad el suceso contrario, advirtiendo además que la suma de probabilidades era UNO; suceso seguro.

Seguimos construyendo conocimientos:

¿Cómo llamo al suceso seguro?

¿Cómo llamo al suceso imposible?

(Ellos mismos dijeron CERO)

¿Cómo llamo al suceso probable?

Unos dijeron un medio, otros un tercio, algunos un cuarto,...

Un buen desafío desde donde investigar. El resultado consideró conceptos de significativa relevancia:

. El suceso probable dependía del Espacio Muestral

. Tendría que ser un número comprendido entre 0 y 1

. La suma de todos los sucesos posibles tendría que ser el suceso seguro, y por tanto, 1.

Desde estas dos estrategias de elaboración didáctica podemos percibir la conducción del tema[11] a partir de modelos constructivos de intervención. Del mismo modo se trabajaron los sucesos compatibles e incompatibles, la probabilidad condicionada, e incluso la probabilidad total y el teorema de Bayes.

---

[11].- Hago mías, en esta indicación, las palabras de Giner de los Ríos: "( Los temas) deben venir a ser una reunión durante algunas horas, grata, espontánea, íntima, en que los ejercicios teóricos y prácticos, el diálogo y la explicación, la discusión y la interrogación mutua alternen libremente como arte racional, como otros tantos episodios nacidos de las exigencias mismas del asunto." Giner de los Ríos Op. cit., p.94

Objetivo: Calcular la probabilidad de varios sucesos en un mismo experimento aleatorio.

Matemática: Sucesos compatibles e incompatibles. P (A U B)

Material: Dados. Barajas de cartas españolas. Regletas. Periódicos. Tablas de números aleatorios.

**Actividad tres: Sucesos incompatibles**

- ¿Cuál es la Probabilidad de que al lanzar un dado se obtenga uno?
- ¿Y de obtener un número impar?
- ¿Cual es la probabilidad de obtener uno o número par?
- ¿Y de obtener un número impar o el número dos?
- ¿Y de obtener un número par o impar?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una carta de una baraja española sea de oros?
- ¿Y de que sea de oros o de copas?
- ¿Y de que se saque una carta que sea as o figura?

( ... )

**Actividad cuatro: sucesos compatibles**

- ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado obtengamos un número par? ¿Por qué?
- ¿Cuáles son los casos posibles?
- ¿Cuáles los favorables?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado se obtenga uno o número impar?
- ¿Cuáles son los casos favorables?
- ¿Cuáles los casos posibles?
- ¿Qué observas?
- Calcula la probabilidad de que al lanzar un dado obtengas uno o número par. ¿Es la misma probabilidad de obtener uno o número impar?
- ¿A qué crees que se debe la diferencia en los resultados?
- ¿Sacas alguna conclusión?
- ¿Podrías poner un ejemplo, aplicando tu conclusión, con una baraja de cartas españolas?

( ... )

Objetivo: Descubrir el cálculo de sucesos en experimentos compuestos.

Matemática: Probabilidad condicionada.

Material: Una bolsa opaca con tarjetas en las que estará escrito el nombre de todas y cada una de las distintas Comunidades Autónomas de España. Diecisiete bolsas, una por cada Comunidad, con tarjetas en las que estuviesen escritos los nombres de las provincias que pertenecen a la Comunidad representada en cada bolsa. Dos dados numerados.

**Actividad cinco**

- ¿Cuál es la probabilidad de extraer de la bolsa de las comunidades la tarjeta de la Comunidad Autónoma de Galicia?
- ¿Cuál es la probabilidad de extraer de la bolsa de Galicia la tarjeta de la provincia de Pontevedra?
- ¿Cómo llamo a la Probabilidad de extraer Galicia?
- ¿Cómo llamo a la Probabilidad de extraer Pontevedra?
- La primera extracción se hace siempre de la bolsa de las comunidades. La segunda extracción de la bolsa que me indique la tarjeta de la primera extracción.
- Se quiere extraer la tarjeta de la Provincia de Toledo.
  ¿Qué crees necesario para poder hacerlo?
- ¿De qué depende que pueda extraer la tarjeta de Toledo?
- Si de la bolsa de las comunidades saco la tarjeta de Castilla y León, ¿tendría alguna oportunidad de sacar Toledo? ¿Por qué?
- ¿Qué es necesario para tener la posibilidad de extraer Jaén?
- ¿A qué está condicionado la posibilidad de extraer la tarjeta de Cuenca?
- ¿Cuántas provincias tiene la CC.AA. de Extremadura?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener la Tarjeta de Extremadura?
- ¿Cuál es la probabilidad de extraer la tarjeta de Badajoz?

( ... )

- ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados se obtengan dos unos?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener uno con el primer lanzamiento?
- Si en el primer lanzamiento se obtuviese un dos, ¿sería posible obtener dos unos? ¿Por qué?

- ¿Está condicionado el segundo lanzamiento al primero?
( ... )

## EVALUACIÓN

La evaluación forma parte del proceso de enseñanza como necesidad docente. Al evaluar la formación de nuestros alumnos, evaluamos también la planificación pedagógica de la unidad didáctica, su adaptación y adecuación al alumno con la metodología utilizada. La evaluación permitirá conocer las características organizativas del programa, realizando una labor sistemática de revisión. No obstante, la evaluación es algo complejo. Abarca un amplio campo en el que intervienen multitud de variables tanto internas como externas, y algunas de ellas, aunque no lo pretendamos, se nos escapan; por lo que sería fácil afirmar que nada posee toda la verdad que describe su fiabilidad y validez.

La variable independiente es la metodología.

Las variables dependientes: El rendimiento, la creatividad y el razonamiento, el gusto por la asignatura, la perseverancia en la búsqueda de soluciones como fundamento de investigación, y la interacción profesor-alumno.

El análisis de los datos registrados mediante el proceso de evaluación, advirtió diferencias significativas entre los resultados obtenidos por la aplicación de una metodología de las *preguntas, el ejemplo y el contraejemplo*, frente los resultados obtenidos, en cursos anteriores, por la aplicación de una metodología de *la información, de las respuestas y de las afirmaciones incuestionables*. Una metodología abierta al protagonismo del alumno, generando un constante diálogo interior que propicie la participación para buscar el conocimiento, favorece la correcta adquisición y aplicación de los conceptos trabajados y un mayor desarrollo afectivo-social.

## CONCLUSIONES

- La metodología que parte de las ideas propias, aunque estas sean erróneas e imprecisas (esto da seguridad al alumno), para buscar el conocimiento, dirigiéndose desde el “no saber” al “saber”, favorece el “carácter” del aprendizaje y el talante del pensamiento matemático. Otra metodología puede conseguir, en el mejor de los casos, que los alumnos disfruten con la realización de ejercicios rutinarios; "sólo la repetición de lo conocido les proporcionará seguridad y confianza".

- La Metodología que utiliza la pregunta como modelo didáctico, canalizada desde el reto y el desafío: “Supongamos que…”, ¿Qué pasaría si…?, favorece en el alumno el gusto por la actividad. La construcción de los conocimientos por parte del alumno, mediante la manipulación, la reflexión y el diálogo hace que la adquisición de los conceptos les resulte más fácil. Otra metodología poco flexible dificultará el desarrollo del pensamiento matemático: "Tendrá pocos espacios abiertos al debate y a la búsqueda de soluciones y planteará cuestiones cuya respuesta sea única". Los alumnos intuyen la validez de criterios del profesor y ante lo que no saben resolver, imitando recursos, se retraen y eluden afrontarlo con los suyos propios.

- La formulación de preguntas a través del diálogo ejemplo-contraejemplo favorece la investigación y la actitud del alumno hacia el conocimiento, desarrolla la capacidad imaginativa para formular y resolver problemas, potencia la habilidad del alumno para descubrir y crear a través de una correcta evolución emotiva, reemplaza el miedo y la inseguridad por la prudencia y la curiosidad y, subordina lo cuantitativo a lo cualitativo asegurando una dinámica de relaciones intelectuales.

- Es necesario sustituir una metodología pasiva que se preocupe exclusivamente de los resultados, por otra, Activa, en la que los procesos del pensamiento sean tan importantes como los productos formales del mismo.

Como síntesis de esta investigación subrayamos la atención que merece la metodología como variable en la investigación educativa.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFÍCAS


ATRIO, S; BANDERA, F; SÁNCHEZ, J.C. (2001): “Una explicación matemática desde el pasado”. *Educación y Futuro.* Revista de Investigación aplicada y experiencias educativas. Nº 4, 25-36

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D., y HANESIAN, H (1983).: *Psicología Educativa.* México: Trillas

BATANERO, C. (2005): Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 8, Núm.3, noviembre.

BELL, E. T. (1948) *Los grandes matemáticos*. Editorial Losada, S. A., Buenos Aires

BERNOULLI, C (1713): *Ars Conjectandi.* Thurnisius. Basilea.

GINER DE LOS RÍOS, F. (1973): *Ensayos*. Alianza Editorial. Madrid. (2ª Ed)

GUYOT, CERIZOLA Y GIORDANO (1993): "Matemática e historia: una articulación para la enseñanza". *Enseñanza de las Ciencias*, Número Extra (IV Congreso)

LAPLACE, P. S. (1814): *Ensayo filosófico sobre las posibilidades.* Ediciones Altaya. Traducción, introducción y notas: Pilar Castillo. Barcelona. 1995.

LAPLACE, P.S. (1878–1912): *Obras Completas.* (14 Volúmenes) Academia de Ciencias de París, Paris.

MORA CHARLES, M. S. (1989):. *Los inicios de la Teoría de la Probabilidad.* Siglos XVI y XVII. Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco. San Sebastián

PASCAL, B.(1981): *Obras: Pensamientos. Provinciales. Escritos Científicos Opúsculos y Cartas.* Alfaguara. Madrid

WHITEHEAD Alfred North (1912): "Mathematics and Liberal Education", *Journal of the Association of Teachers of Mathematics for the Southeastern Part of England.* Volume I, Number 1 in A philosopher looks at science, (Philosophers Library) New York, 1965

ZABALLOS CRESPO, J. (2006): "Creativ Learning Method. Una investigación sobre las nuevas fronteras formativas en España y en Europa" *Educación y Futuro.* Revista de Investigación aplicada y experiencias educativas. Nº 14, 165-176