



Por JOSE ANTONIO FERNANDEZ BRAVO
Especialista en Didáctica de la Matemática

La didáctica de las matemáticas

LA NATURALEZA DEL MATERIAL EN LA DIDACTICA DE LA MATEMATICA

La utilización de materiales y recursos en el aula es consecuente, en su hacer didáctico, con la interpretación que se tenga de la matemática.

Que los materiales "didácticos" se apliquen en el trabajo de clase no significa que cubran los altos desafíos educativos como el aprendizaje significativo y funcional o el hacer heurístico. Es la pedagogía utilizada la que nos debe conducir, o no, al cumplimiento de tales objetivos.

La interacción de tres estratos educativos vinculantes: Matemática, didáctica y material, pretende hacernos reflexionar, si es que cabe la pluralidad interpretativa, sobre lo que cada uno de nosotros entiende por "conocimiento matemático"; punto de apoyo desde donde estudiar los diversos parámetros didácticos.

EN LA DIDACTICA...

Tomemos la terna abc y apliquemos una transformación cíclica de tal forma que a ocupe el lugar de b, b el de c y c el de a, obteniendo: a b c c a b b c a fijémoslos en dos criterios: "letras iguales" (al que marcaremos con el operador +), "letras distintas" (al que marcaremos con el signo -) y así, mediante una norma "práctica" podríamos "enseñar" la regla de Sarrus por la que se calcula los determinantes de tercer orden:

$$a a a + b b b + c c c \quad - c a b - c a b - c a b$$

¿Entra esta actuación dentro de la didáctica de la matemática? (1) Se ha presentado una regla en la que,

para su aprendizaje, sólo se necesita un mínimo de memoria y atención. Para algunos la magia de este recurso será un argumento válido que permita el "conocimiento" de la regla de Sarrus.

Creo que, al relacionar los medios con los resultados no diferenciamos unos de otros o las pautas adicionales de las significativas y, confundimos el conocimiento (2) con la identificación. Que se identifique perfectamente no quiere decir que se "conozca". Existe algo que, erróneamente, llamamos didáctica y que consiste en la fabricación de reglas prácticas en las que no cabe ni el juicio del alumno ni la lógica del razonamiento. Los estudiantes suelen identificar los problemas "de sumar", "de restar", los distintos teoremas de geometría, las reglas de cálculo,... y las diferencian entre sí haciendo, de todos y cada uno de los distintos conceptos parcelas independientes, ya que, a todos y a cada uno, asocian su particular regla práctica.

(1) Bertrand Russell escribía con énfasis de protesta: "Cuando nuestros niños mal aprenden, sin gracia, cosas acerca de las clases están recibiendo lo que queda, al paso del tiempo y bajo la apisonadora de la vulgaridad, del brillante esfuerzo intelectual de unos hombres."

(2) Nos referimos al conocimiento matemático. La elección, si cabe, entre proceso y resultado o la exactitud del número frente al rigor del pensamiento. Muchas veces se mutila el proceso afianzando una forma más cómoda, según el profesor, para responder a los "contenidos".

"Así pues dime, y sin miedo, qué es lo que tú piensas que es el conocimiento". (Sócrates. Teeteto, 146 C 3).

Al igual que debemos reflexionar sobre la interpretación que cada uno de nosotros tiene sobre "el conocimiento", debemos perder algunos minutos en frases y términos predisuestos a formar historia de una publicidad educativa: "pensar matemáticamente", "aprender a pensar matemáticamente", "enseñar a aprender matemáticas",... ya que, de una u otra interpretación que de estas frases tengamos, depende que actuemos de una u otra forma.

EN EL MATERIAL...

El empleo del material es, sin duda, más que necesario. Pero si ha de ser fructífero y no perturbador, debe llevar implícito un fuerte conocimiento de los fenómenos intelectuales que se pueden conseguir y de cómo se consiguen.

Para el aprendizaje de la matemática existen distintas clases de materiales; manipulativos, gráficos, audiovisuales,... que suelen ser utilizados en el aula. Videos, diapositivas, geoplanos, regletas, espejos, diskettes,... materiales que, ni por su existencia ni por su aferrante utilización son didácticos. Es general, refiriéndonos a los citados, la expresión: "Esto es un material didáctico", cuando deberíamos decir: "Esto es un material "posiblemente didáctico". Es la pedagogía utilizada la que puede garantizar el cultivo de la individualidad sin mutilar el desarrollo de la comprensión. Para ello, es necesario que el alumno obtenga en el material un campo empírico donde apoyar una investigación. Pero, en ocasiones, se confunde la investigación con el "encontrar lo que el profesor desea" o lo que el "programa impone" y se aduce a una evolución positiva cuando la situación es consecuente con la idea del profesor que abrió la pauta para trabajar, o se corresponde con el ritmo del programa que exigió el concepto. Esto obliga al alumno a estar atento para conseguir unos determinados resultados y, al profesor, a ayudar a aquellos que desvían sus conclusiones de las ya admitidas por esas estenuantes letras de imprenta o esos firmes conocimientos que se han ido heredando con un interés y perseverancia que -valga la ironía-, tristemente, hoy, han desaparecido.

En la investigación, ni el factor tiempo es un parámetro ni la obtención del paradigma un éxito. Si a esto añadimos que "la situación intelectual jamás se repite de la misma forma" (Ernst Mach), nos encontramos con que la utilización del material como campo empírico donde investigar es sumamente difícil.

El material no debe ser utilizado sino manipulado, lo que debe ser utilizado es el conjunto de ideas que, de su manipulación, se generan en la mente de cada alumno y canalizarlas, en tanto que han sido descubiertas por el niño, en el sistema matemático. Es algo así como el espejo y sus imágenes. El espejo es el mismo pero cada persona que se pone frente a él ve

una imagen distinta a la que vio el anterior o ver el siguiente. Imaginemos ahora un espejo abstracto que refleje ideas, procesos, intuiciones, percepciones,... único en sí mismo y válido para todos, llamémosle campo empírico o material o situación práctica,...; pero esto sólo no bastaría; espejo y sujeto no son suficientes. Es necesario que cada sujeto se reconozca en él.

EN LA MATEMATICA...

Una buena pedagogía en la utilización del material permite que se manifieste en la mente del alumno una serie de ideas que podríamos llamar "mundo conceptual", pero de nada serviría si ese "mundo conceptual" no se adhiere al complejo matemático. No se trata de elaborar juegos en el aula, ingeniosas innovaciones con aros y cuerdas o laberintos en tres dimensiones. Se trata de elaborar finalidades, objetivos y buscar, ahora sí, ingeniosos recursos desde donde el alumno pueda descubrir los conceptos de base en las situaciones propuestas. El "hacer haciendo" puede ser una pérdida de tiempo si las acciones no se canalizan respecto a la epistemología matemática o no se crean las estructuras mentales necesarias para que el modo de hacer se intelectualice. Que un garbanzo y un garbanzo y un garbanzo sean tres garbanzos nada dice de que $1+1+1=3$. El material es físico, la idea es matemática.

La nueva reforma del sistema educativo, refiriéndose al área de matemáticas nos advierte que "la construcción del conocimiento matemático es inseparable de la actividad concreta sobre los objetos, de la intuición y de las aproximaciones inductivas" (p.379). Pero se puede actuar de muchas maneras con los objetos. Apoyándonos en el material Números en Color, si tomamos dos regletas distintas, cualesquiera; sean la azul y la rosa, podemos actuar:

- Comparándolas en tanto a su altura o longitud y fijar, con actuaciones similares, que la azul es mayor que la rosa o la rosa menor que la azul.

- Creando una unidad de medida y, midiendo con ella ambas regletas, establecer una correspondencia biunívoca mediante la que se observaría que a una regleta le "sobran" o a la otra le "faltan" y que, sin embargo, con regletas del mismo color todas y cada una de las unidades de medida se corresponden entre sí, sin que sobre ni falte ninguna.

En este último caso, y dejando al alumno que experimente con distintas unidades de medida, sacando sus propias conclusiones, la intuición que se percibe va mucho más allá matemáticamente que la intuición percibida con la primera forma de actuar. La primera es física, la segunda es matemática. Según ésta, la pregunta: ¿qué es mayor: el conjunto de los números naturales o el conjunto de los números pares?, no tendrá una contestación engañosa.

h	g	e	f
j	i	a	b
		c	d
m		n	

"En la actualidad,..., se les da a los niños y a las niñas una serie de reglas que no se les presentan ni como verdaderas ni como falsas, sino meramente como la voluntad del profesor, la manera en que, por alguna insoldable razón, el profesor prefiere jugar su juego" Así veía Bertrand Russell la enseñanza de las matemáticas en la escuelas, percibiendo también que "en la mayoría de los libros de texto de matemáticas hay una carencia total de unidad en el método y de desenvolvimiento sistemático de un tema central. Proposiciones de muy diversa índole se prueban con cuantos medios se creen que son fácilmente inteligibles..." Idénticas consideraciones podríamos hacer sobre la utilización del material en el aula si se convierte en un libro de texto, donde la matemática se somete a un plan parcelario y el constructor marca un precio de examen por parcela.

EN LA DIDACTICA..., EN EL MATERIAL...

Entre las notas sobre la enseñanza de la matemática según la nueva reforma el MEC escribe: "El profesor suele utilizar la explicación de un tema para transmitir unos conceptos claros y ordenados según la lógica interna de las matemáticas. Sólo el conocimiento de que es el alumno el constructor de sus propios conocimientos le llevará a intervenir de manera distinta a la habitual".(p. 523)

Existe una atencencia a la realidad circunstante del programa y es inevitable romper la vigencia de esta fuerza expresiva, sustituyéndola por elementos que aporten al alumno el desarrollo de su propio pensamiento y no el recuerdo de las ideas fecundas del maestro, gestadas desde su propio estatuto.

Supongamos la construcción de una figura rectangular cuyas secciones se representen mediante letras minúsculas. Supongamos la fabricación de doce papeletas en las que aparezcan todas y cada una de las letras que representan a cada sección.

Las papeletas se introducen en una bolsa sacando al azar una de ellas. Si se saca, por ejemplo, la papeleta marcada con la letra "h" hay que averiguar qué es la sección que representa dicha letra respecto de la figura. Si a la figura la llamáramos "uno", la sección a la que corresponde la letra "h" es la cuarta parte de una de las tres filas que componen la figura ; la sección es $1/12$ de la figura. Lo que la mente del niño está buscando es $1/4$ de $1/3$. No tardarán mucho en descubrir, dialogando entre ellos, el valor de todas y cada una de las distintas secciones.

El siguiente paso puede consistir en establecer, mediante la manipulación, equivalencias entre las letras:

$$g + h = m; i + j = g + h; m - h = i; a + b = e; a + b = c + d;$$

$$m - (a + b) = c + d;$$

$$6 \times e = 3 \times m; (g + h) / 4 = b; n - (j + a) = b;$$

$$(g + h) / 4 = n - (j + a) ; ...$$

¿Qué ocurriría si, apoyándonos en esas expresiones literales sustituyésemos cada letra por su correspondiente valor, ya calculado anteriormente?

$$* 1/12 + 1/12 = 1/6;$$

$$* 1/3 - 1/6 = 1/6; 1/3 > 1/6; 1/3 \text{ es mayor que } 1/6 \text{ en } 1/6; 1/3 = 1/6 + 1/6; 1/3 = 2/6$$

$$* 1/6 - (1/24 + 1/24) = 1/24 + 1/24; 1/6 - 2/24 = 2/24$$

$$1/6 > 2/24; 1/6 \text{ es mayor que } 2/24 \text{ en } 2/24; 1/6 = 4/24$$

* (...)

...Y es que, como escribió Wittgenstein refiriéndose a las matemáticas: "lo esencial de unas reglas es la multiplicidad lógica que tienen en común todos los distintos símbolos posibles".

Sigamos caminando y fabriquémonos dos bolsas más; una, con papeletas marcadas con los números de 1 a 6 y otra, con dos papeletas en las que aparezca el operador (+) o el signo (-), juguemos a establecer una dinámica de relaciones sacando, por ejemplo: Una papeleta con número, una papeleta con signo y dos papeletas con letras. Representando el número, el valor total de la figura y el signo, la relación matemática de las papeletas con letras: Dado el número 5, el signo (+) y las letras (n,a) tendríamos que calcular $(n+a)$, siendo 5 el valor de la figura. Se escribirán multitud de proposiciones y reglas, se estudiarán los resultados de

iguales algoritmos ante el cambio numérico de la figura total, se verá la multiplicación y la división de una fracción por un número, se estudiarán las fracciones equivalentes descubriéndose sus propiedades, se encontrarán relaciones de proporcionalidad, se hablará de relaciones de semejanza, equivalencia y congruencia entre las figuras de cada sección,... Se aplicará un razonamiento inductivo y se utilizará, en ocasiones, un pensar deductivo (3) para seguir construyendo. En algunos de sus hallazgos se admirarán del resultado. Se probarán conjeturas falsas, llegando a situaciones absurdas y erróneas, y serán estas desarraigadas conclusiones promotoras de nuevos y originales procesos.

En los comentarios de Proclo a Euclides leemos: "Y no tiene nada de sorprendente que la invención, lo mismo en geometría que en las demás ciencias, haya procedido de un menester, porque todo lo que el devenir arrastra lo lleva desde lo imperfecto a lo perfecto. Así que, según esto, y por verosímil conjetura el progreso a debido ir de la sensación al razonamiento y de éste a la inteligencia noética (4)".

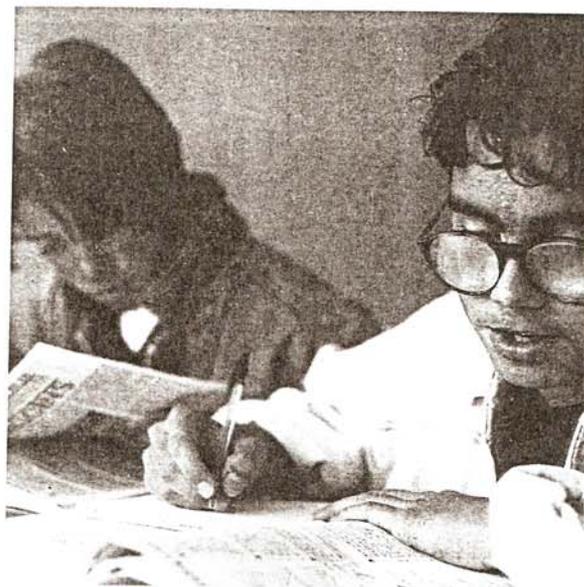
Ciertamente, será difícil precisar el tiempo y acotar el programa de este tipo de actividades,...el Profesor D. Pedro Puig Adam en su obra: *Didáctica Matemática. Eurística*. (Instituto de Enseñanza laboral, Madrid, 1956), escribe: "Aprendan ante todo los profesores a observar atentamente a sus alumnos, a captar sus intereses y sus reacciones, y cuando sepan leer bien en ellos, comprobarán que en ningún libro ni tratado existe tanta sustancia pedagógica como en el libro abierto de una clase, libro eternamente nuevo y sorprendente". (pág 8).

EN LA MATEMATICA..., EN LA DIDACTICA..., EN EL MATERIAL...

Yo creo que para que un material sea didáctico debe estar el alumno habituado a él, conocerlo y relacionarse, intencionadamente, desde sus particulares modos. Su manipulación dará paso a una libre curiosidad

(3) La didáctica de la matemática se justifica tanto con la técnica inductiva como deductiva. En el siglo XX se caracteriza a la matemática de distinta forma a como era caracterizada en los siglos XVII y XVIII, cuando no había una distinción científica clara entre inducción y deducción. Los patrones del contenido matemático no caben en un sólo método. El concepto que se ha obtenido mediante la lógica del descubrimiento por un método inductivo, ser utilizado posteriormente como tesis válida en un método formal deductivo que conduzca a otros descubrimientos. "Cualquier potencia de exponente cero equivale a uno", no admite un razonamiento inductivo. Si esto no se prevé haremos resurgir problemas del empirismo clásico o neoclásico, ofreciendo al alumno soportes físicos pero no matemáticos.

(4) Inteligencia noética puede entenderse como el estado perfecto de pensamiento, sujeto a la deducción y a la abstracción.



El conocimiento del niño está relacionado directamente con su pensamiento y acción. (Foto: Javier Ayastuy).

por despreciar los enigmas percibidos, y permitirá la creación de estructuras que canalicen la captación de las ideas generadas por sus acciones, sin estar éstas sujetas a la condición temporal o al éxito de los paradigmas concebidos como absolutos en la justificación de un programa

Estoy hablando de un campo empírico, donde las exigencias de una investigación respeten el razonamiento inductivo y aporten al descubrimiento la transmisión y no la imposición de los conceptos; permitiendo que los alumnos sean conscientes de su "admiración" en los hallazgos que consiguen estando en relación con el material. Se presenta, entonces, una interlocución que alberga el interés y la confianza desde donde se diseña el influjo de la actitud crítica; creando continuos interrogantes, intransferibles e individuales con los que puedan dudar sobre lo mismo sin tener la misma duda. Entonces "el conocimiento", adquirido por el niño, es consecuente con su sistema de pensamiento y acción, sujeto, únicamente, a la condición de posibilidad de estar en diálogo con un objeto o conjunto de objetos. Pero, al no existir objeto alguno que por sí mismo sea didáctico, no se trata de que los alumnos tengan materiales sino de que los materiales tengan alumnos; y, todo lo que aquí se ha expuesto subyace, evidentemente, a la interpretación que de "material didáctico" y "conocimiento matemático", tenga el Profesor que lo utilice.

* * * * *