

METAMODELOS Y MODELOS DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

José Antonio Fernández Bravo

METAMODELOS (Entendemos por "Metamodelos" cada una de las distintas clases de "modelos de situaciones problemáticas", presentadas a la actividad del alumno, capaces de generar ideas válidas para la invención, reconstrucción y resolución de problemas matemáticos).

- **GENERATIVOS.** Deben ser las primeras situaciones a las que se enfrente el alumno, aunque no tienen que ocupar únicamente esos primeros lugares. Desarrollan la confianza y seguridad de los alumnos en sí mismos. Ayudan a generar ideas y a utilizar el razonamiento lógico. La operación queda subordinada al pensamiento, del que se desprende divergencia y flexibilidad. Ayudan a percibir la estrategia como vía de solución y a buscar, a posteriori, la operación válida para dar cuerpo al proceso de resolución. El número es algo secundario. Permiten retener el desafío central a partir del cual se reflexiona. Se percibe la importancia de la ausencia de arbitrariedad en los problemas. Se desarrolla la atención, la actitud crítica, la capacidad de tolerancia, colaboración y solidaridad respecto a las ideas de los demás.
- **De ESTRUCTURACIÓN.** Ayudan a estructurar mentalmente las partes que componen el problema: Enunciado, pregunta, resolución, solución. Se percibe la importancia de cada una, la relación que tienen y la no-arbitrariedad entre ellas. Al implicar al alumno en la construcción del problema interpreta mentalmente la situación problemática, utilizando las operaciones matemáticas como instrumentos para la resolución de las estrategias elegidas; distingue la solución del problema de la resolución de éste y es capaz de estimar con razonamiento lógico la validez del resultado debido a que ha utilizado la reversibilidad de los procesos operativos como técnica de verificación. Se es consciente de que un mismo resultado se puede corresponder con diferentes situaciones planteadas; donde un alumno suma, otro resta. Del mismo modo se es consciente de que una misma operación o conjunto de operaciones da lugar a la creación de una amplia diversidad de situaciones. Se observan interesantes razones para respetar las ideas de los demás.
- **ENLACES.** Ayudan a encontrar la concordancia lógica entre enunciado-pregunta-solución; se trabaja con variables de relación entre estas partes: variables sintácticas, lógicas, matemáticas, creencias sociales, experiencias propias. Desarrollan la atención y la prudencia en el trabajo. Evitan la dependencia de la asociación de formas lingüísticas con la aplicación de operaciones. No interviene el azar en la utilización de los datos; se percibe el significado de éstos dentro de la situación problemática. Se comprende que no todos los problemas presentan datos numéricos y que no todos los datos de un problema son numéricos.

- De **TRANSFORMACIÓN**. Utilización de una diversidad de enfoques y pluralidad de alternativas. Hay un dinamismo de relaciones mentales que implican el desarrollo de un pensamiento matemático. Se consolidan conceptos. Se provoca la atención a los elementos con que se representan las magnitudes que intervienen en las situaciones. Utilización de método de Análisis y método de síntesis. Ayudan a la autocorrección y a establecer relaciones de semejanza y diferencia entre las estrategias de resolución de situaciones problemáticas.
- De **COMPOSICIÓN**. Ayudan a ver el problema como un todo. Emisión de juicios a partir de relaciones múltiples. Desarrollan la memoria, la observación y la capacidad de demostración; ir hacia atrás y pensamiento reversible. Permiten la autocorrección. Consciencia de la necesidad de lectura tantas veces como sea necesaria. Utilización de método de Análisis, de síntesis y de análisis-síntesis.
- De **INTERCONEXIÓN**. Extensión de las ideas. Apertura mental en la aplicación de los conceptos y operaciones. Desarrollo de la originalidad, imaginación y creatividad. Aportan componentes de interdisciplinariedad y transversalidad. Ayudan a reflexionar sobre la lógica que ha operado en el razonamiento del proceso de resolución de un problema y a distinguir entre lo necesario y lo suficiente.

Modelos Generativos:

1.- Situaciones sin número. Se presenta un problema en cuyo enunciado y pregunta no aparecen datos numéricos. Para llegar a la solución no se necesita operación alguna.

2.- Informaciones de las que se puede deducir algo. Se presentan informaciones, sin pregunta alguna: Puede ser una frase, una portada de un libro, un cartel publicitario, una lista de precios,... La realización de la actividad consiste en deducir ideas y clasificarlas en: lógicas -aquellas que son verdad o mentira para todos- y no lógicas; así como, posibles -muy posibles, poco posibles- e imposibles.

3.- Situaciones cualitativas. Se presenta un enunciado y una pregunta con sentido lógico pero de forma incompleta para llegar a la solución. Se va completando todo lo que se necesite en la medida en que el alumno lo vaya pidiendo

4.- Enunciados abiertos. Se le da al alumno una información: A partir de una frase, de una foto, de un dibujo, de un esquema, de un titular de un periódico, un prospecto, una programación de televisión... Su labor consiste en inventar una situación problemática en la que utilice esa idea.

5.- Problemas de lógica. No interviene el algoritmo. Utilización del razonamiento por deducción, inducción y analogía

Modelos de Estructuración:

6.- Inventar y resolver un problema a partir de una solución dada. El alumno creará el enunciado, la pregunta y el proceso que se pueda corresponder con la solución de partida.

7.- Inventar y resolver un problema a partir de una expresión matemática. Creación de un enunciado y pregunta que se corresponda con el contenido de relación aplicativa de la expresión de partida.

8.- Inventar y resolver un problema cumpliendo dos condiciones: Llegar a la solución dada y aplicar la/s operación/es indicada/s.

9.- Inventar y resolver un problema cumpliendo dos condiciones: Llegar a la solución que se nos ha indicado y utilizar (todos/no todos) los datos numéricos que se nos han dado

Modelos de Enlaces:

10.- Expresar preguntas y responderlas a partir de un enunciado dado. La labor del alumno consiste en crear preguntas que se puedan contestar teniendo en cuenta, únicamente, el enunciado de partida

11.- Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la operación. Se tiene un enunciado y preguntas en blanco. Cada una de esas preguntas lleva indicada la operación que se tiene que utilizar para obtener sus respuestas.

12.- Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la expresión matemática. Se tiene un enunciado y preguntas en blanco. Cada una de esas preguntas señala la expresión matemática que se debe utilizar en el proceso de resolución

13.- Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la solución. Se presenta un enunciado con preguntas en blanco.

14.- Inventar un enunciado que se pueda corresponder con una pregunta dada, y resolver el problema: utilizando todos los datos del enunciado / sin utilizar todos los datos del enunciado.

15.- Inventar un enunciado que se corresponda con: una pregunta dada y una solución dada, y resolver el problema: utilizando todos los datos del enunciado / sin utilizar todos los datos del enunciado.

16.- Inventar un enunciado que se corresponda con: una pregunta dada y la operación/es a seguir en el proceso de resolución, y resolver el problema.

17.- Inventar un enunciado que se corresponda con: una pregunta dada y el proceso de resolución dado.

18.- Inventar un enunciado que se corresponda con: una pregunta dada, la solución del problema dada y los datos numéricos dados que deben aparecer en el enunciado. Resolver el problema: utilizando todos los datos del enunciado / sin utilizar todos los datos del enunciado

19.- Inventar un enunciado que se corresponda con varias preguntas dadas. Se presentan varias preguntas. La labor del alumno consiste en crear un enunciado, y sólo uno, capaz de dar respuesta a todas y cada una de las preguntas presentadas.

20.- Inventar un enunciado, y sólo uno, con el que se pueda responder, y mediante las operaciones indicadas, a todas y cada una de las preguntas dadas. Se presentan varias preguntas acompañadas de la indicación de operación/es que se tienen que aplicar para llegar a su respuesta.

21.- Inventar un enunciado, y sólo uno, que se corresponda con: varias preguntas dadas y las soluciones que acompañan a todas y cada una de ellas. Comprobar el problema.

22.- Inventar un enunciado, y sólo uno, en el que aparezcan los datos numéricos dados: utilizando todos en el proceso/sin utilizar todos en el proceso, que se corresponda con: varias preguntas dadas y las soluciones que acompañan a todas y cada una de ellas.

Modelos de Transformación:

23.- Cambiar los datos necesarios del problema, que ya ha sido resuelto, para obtener una solución dada y distinta a la que ya se obtuvo anteriormente.

24.- Cambiar los datos del problema, que ya ha sido resuelto, para obtener la misma solución que se obtuvo anteriormente. Se parte de un problema fácil y posible de realizar por todos los alumnos. Se van cambiando los datos por otros más complejos, pero equivalentes, para que no hagan variar la solución del problema.

25.- Añadir o Eliminar información de un problema, que ya ha sido resuelto, para que la solución no varíe.

26.- Cambiar los tiempos verbales en los que se expresa un problema, que ya ha sido resuelto. Resolver el nuevo problema. Observar y comparar las soluciones de ambos.

27.- Cambiar lo que sea necesario, y sólo si es necesario, de un problema, para que el proceso de su resolución, que se presenta, sea correcto.

28.- Averiguar el dato falso de un problema, dándoles la solución correcta. Existe un dato, y sólo uno, que no nos permite llegar a la solución expresada.

29.- Cambiar la pregunta de un problema, que ya ha sido resuelto, para que la nueva solución sea la misma que la que se obtuvo anteriormente.

30.- Cambiar el orden en el que aparecen las proposiciones del enunciado de un problema, que ya ha sido resuelto. Resolver el nuevo problema. Observar y comparar ambas soluciones.

31.- Cambiar la expresión afirmativa/negativa de las proposiciones de un enunciado. Se resuelve un problema en cuyo enunciado intervienen dos y solo dos proposiciones. Una vez resuelto, se niega la primera proposición, y sólo esa. Se crea un nuevo problema que se resuelve. A continuación, se niega la segunda proposición, y sólo esa. Se crea un nuevo problema que se resuelve. El último paso consiste en negar las dos proposiciones, se resuelve el problema resultante. Se observan las dificultades de precisar la solución, se comparan las cuatro soluciones.

32.- Cambiar la conjunción por disyunción, y viceversa. Resolver los problemas. Observar y comparar las soluciones.

33.- Negar las proposiciones del enunciado de un problema y cambiar la pregunta para que la solución no varíe. Los pasos son los mismos que se han seguido en el modelo 31, la diferencia consiste en que el alumno, una vez realizadas las negaciones, cree una pregunta para todos y cada uno de los nuevos problemas, tal que su solución sea la misma.

34.- Buscar la correspondencia enunciado-pregunta-solución. Se dan varios enunciados, varias preguntas y varias soluciones u operaciones, desordenadas pero que se corresponden entre sí. El trabajo del alumno consiste en buscar la correspondencia enunciado-pregunta-solución.

35.- Mezclar las preguntas de dos problemas. Se presentan dos enunciados de dos problemas distintos. Las preguntas que se corresponden con cada uno de estos enunciados se han mezclado generando un sin sentido de palabras. La realización de la actividad consiste en resolver los dos problemas.

36.- Cambiar los datos de un problema, o problemas, dentro del mismo, o entre ellos. Se advierte al alumno que todos o algunos de los datos que aparecen se han cambiado y no ocupan el lugar que les corresponde. Su labor consiste en dar respuesta a la pregunta del problema o problemas.

37.- Mezclar el/los enunciado/s de un/os problema/s. Se presenta un problema cuyo enunciado es un sin sentido porque se ha desordenado, o se presentan dos enunciados mezclados. Se da al alumno lo necesario para que pueda ordenarlos sin ambigüedad alguna y resolver el/los problema/s.

38.- Mezcla de los procesos de resolución de dos problemas. Se presentan dos problemas distintos. Se mezclan los procesos de resolución. La labor del alumno consiste en identificar cada proceso con el problema correspondiente.

39.- Cambiar las preguntas de un problema por una, y sólo una. Se presenta un problema con varias preguntas. La labor del alumno consiste en buscar una sola en cuyo proceso de resolución se contesten las demás.

Modelos de composición:

40.- Componer el/los enunciado/s de un/os problema/s a partir de todos/algunos de los datos que se ofrecen, y resolver la situación problemática. Se presentan enunciados tal que desde esa forma de presentación se encuentran incompletos para dar respuesta a su pregunta. Se presentan fuera del problema una serie de datos. La realización de la actividad consiste en elegir el lugar necesario de los datos para resolver el problema.

41.- Completar los datos del enunciado de un problema a partir del proceso de resolución. Se presenta un problema resuelto, de cuyo enunciado se han borrado los datos y se ha dejado el espacio correspondiente para que el alumno lo complete según corresponda.

42.- Completar los datos del enunciado de un problema a partir de la solución de éste. Se presenta un problema indicando su solución. De su enunciado se han borrado los datos y se han dejado los espacios en blanco. El alumno completará el enunciado según corresponda.

Modelos de Interconexión:

43.- Inventar un problema con un vocabulario específico dado, y resolverlo. Se le da al alumno el vocabulario que debe utilizar en la invención.

44.- Inventar un problema con: un vocabulario específico y la operación/es que debe utilizarse para su resolución.

45.- Inventar un problema con: un vocabulario específico y la solución dada.

46.- Resolver problemas que se presentan de forma completa, cuya resolución favorezca la aplicación de los conceptos, operaciones y relaciones lógicas a las necesidades habituales de desarrollo personal, convivencia y relación con el entorno: con solución única, sin solución definida, con varias soluciones.

47.- Seleccionar la información necesaria mediante la consulta de documentación. Se presenta una pregunta que, para su contestación, se requiere la consulta de diccionarios, textos, enciclopedias,... o, simplemente, salir al patio, husmear en los listados de alumnos del colegio,... para recoger la información necesaria. Si nuestros alumnos pertenecen la Educación Primaria, es imprescindible facilitar el éxito de la búsqueda, en la que muchos de ellos perderían el tiempo sin rentabilizar el esfuerzo. Para ello, se pone a disposición del alumno una serie de fichas elaboradas por el profesor -adaptadas, en número y contenido, a la edad del alumno-, entre las que se pueda seleccionar y extraer los datos necesarios para resolver el problema.

48.- Resolver un problema que se presenta de forma distinta a la habitual. Una poesía, un caligrama, lenguaje gráfico: tablas, diagramas; un cuento breve,...

49.- Relación entre lógica y matemática.

METAMODELOS Y MODELOS DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

José Antonio Fernández Bravo

** Escribe la pregunta, según corresponda.

La catedral de Sevilla se comenzó a construir en el año 1402 y se terminó en el año 1519. Su planta es rectangular.
La catedral de Santiago de Compostela, en Galicia, se construyó del año 1075 al año 1128.

_____ ?
Sol.: 274 años

_____ ?
Sol.: 4.692 meses

_____ ?
Sol.: No

_____ ?
Sol.: La catedral de Santiago

_____ ?
Sol.: No se puede saber con los datos que se tienen

** Inventa un enunciado y resuelve el problema:

¿Cuántos libros tengo que meter en cada caja sabiendo que en cada caja hay un libro más que en la anterior?

** ¿Cuántas páginas le quedan a Susana por leer? Sol.: 32

** Se te presenta la pregunta y el proceso de resolución de un problema. Escribe un enunciado que se corresponda utilizando tres datos numéricos, y sólo tres.

¿Cuánto costó cada regalo?

$$57 - 8 = 49 ; \quad 57 + 49 = 106 ; \quad 106 - 30 = 76$$

Solución: _____ Euros; Euros; _____ Euros;
_____ Euros

** Selecciona los datos numéricos que se indican para construir los enunciados de los tres problemas siguientes.

DATOS: 9, 12, 6, 4, 8, 10, 7

¿Cuántas estrellitas se hicieron para adornar la clase?

Se hicieron 48 estrellitas para adornar la clase

¿Cuántos dibujos pusieron en la pared del pasillo, entre las tres clases?

Pusieron 25 dibujos

¿Cuántas excursiones hicieron los niños de tercero más que los niños de segundo? Hicieron 3 excursiones más.

** Resuelve el siguiente problema y, una vez resuelto, redáctalo dejando la mínima información que te permita llegar a la solución del problema sin que ésta varíe:

"Un señor, que es dueño de una tienda, tiene, actualmente, 57 años y es padre de tres hijos de edades consecutivas. La suma de las edades de sus hijos es 78 años. El primero de ellos nació cuando este señor tenía 20 años, el segundo cuando tenía 21 años y el tercero cuando tenía 22 años. ¿Qué edad tienen, actualmente, los hijos de este señor?"

** Cambiar la conjunción por disyunción, y viceversa. Resolver los problemas. Observar y comparar las soluciones.

Compraré un kilo de lentejas de 4 Euros / kilo y compraré dos kilos de judías pintas de 3 Euros / kilo o tres kilos de judías blancas de 2 euros y 50 céntimos / kilo. ¿Cuánto dinero pagaré por esa compra?

** Algunas de las siguientes expresiones matemáticas sirven para resolver las siguientes situaciones problemáticas. Averigua cuáles son:

762×6 ; $762 - 6$; $762 + 6$; 762×9 ;

$762 - 9$; $762 + 9$; 1503×4 ; $34 + 98$;

- En una biblioteca hay seis salas de lectura. Cada una de esas salas tiene 762 libros. Sólo una sala está, hoy, abierta a la lectura. En este momento hay 9 personas leyendo. ¿Cuántos libros tendrías para elegir si vas a leer en este momento, a esa biblioteca?
- En una biblioteca, que se abre por vez primera a las nueve de la mañana de hoy, hay seis salas de lectura. Cada una de esas salas tiene 762 libros. ¿Cuántos libros hay en la biblioteca a las 9 de la mañana de hoy?
- En una biblioteca hay seis salas de lectura. Se han prestado seis libros, y sólo esos, de una sola sala de lectura, quedando, en esa sala, 762 libros para leer. ¿Cuántos libros había en esa sala antes de realizar ningún préstamo?

** Se han mezclado las preguntas de los dos problemas siguientes. Descífralas y resuelve los problemas.

"Para ir de excursión, 115 niños contratan dos autobuses. En uno de esos autobuses viajan 57 niños"

"En la biblioteca hay 369 libros de cuentos y 235 libros de poesía. ¿Cuántos en la biblioteca viajan hay, en el otro cuentos ? niños Cuántos libros de autobús y de poesía ?

RELACIÓN LÓGICA ENTRE LOS DATOS

+ Escribir 4 números de una, dos, tres y cuatro cifras, respectivamente.

En el año _____ un señor A tenía _____ años. Murió, _____ años más tarde, en el año _____. ¿A qué edad murió?

Mis padres han comprado _____ bolsas de naranjas de _____ Kg cada una.

Cada bolsa, costaba _____. Pero, si te llevabas _____, te regalaban otra bolsa de naranjas. Si para adquirir esas naranjas han pagado con un billete de _____ Euros y _____ monedas de _____ céntimos de euro. ¿Cuánto dinero les ha sobrado de esa compra?

LÓGICA EN LAS ESTRATEGIAS

** Completa el enunciado, según corresponda.

Te escribimos a continuación, sin respetar un orden, las operaciones que permiten resolver correctamente estos dos problemas. Todas y cada una de estas operaciones son necesarias.

$$16 + 1 = 17 ; 8 \times 4 = 32 ; 15 : 5 = 3 ; \\ 32 : 2 = 16$$

$$2000 - 1992 = 8 ; 32 - 17 = 15 ; 12 - 7 = 5 ;$$

$$32 \times 2 = 64 ; 3 \times 2 = 6$$

PROBLEMA 1

En un pueblo hay 16 matrimonios recién casados, un matrimonio que lleva 56 años casado y otros matrimonios. En este pueblo nacen _____ niños al trimestre y sólo dos. Si consideramos esta información el día 1 de Enero de _____, ¿Cuántos niños habrán nacido hasta el 1 de Enero del año _____?

PROBLEMA 2

En un pueblo tienen _____ fiestas al año. Los primeros _____ meses tienen la _____ de las fiestas más una y en cada uno de los meses restantes tienen _____ fiestas. ¿Cuántas fiestas tienen en Agosto y Septiembre?

Ningún dato numérico del siguiente problema está donde le corresponde. Resuelve el problema.

"Tengo 1 Euro y 20 céntimos de Euro. Una bolsa de gusanitos cuesta 80 céntimos de Euro. Una bolsa de patatas cuesta 2 Euros. Una bolsa de pipas cuesta 75 céntimos de Euro. Me he comprado la bolsa de pipas, aunque era lo más caro, y otra cosa. Me ha sobrado dinero. ¿Qué me he comprado?"

Ninguno de los datos numéricos subrayados del siguiente problema está donde le corresponde. Resuelve el problema.

"Mis dos hermanos y yo estamos leyendo el mismo libro. Yo he leído 53 páginas de las 10 que tiene el libro. Mi hermano Alberto ha leído 36 páginas menos que Jaime. Y Jaime ha terminado de leer la página 193. ¿Cuántas páginas del libro le quedan por leer al que más adelantada lleva la lectura?"

Resuelve el siguiente problema, sabiendo que los datos numéricos puede que están, o no, donde corresponde.

"A las 8 en punto de la mañana del día 7 de Abril me llamaron por teléfono. A esa hora sólo me faltaba desayunar para salir de mi casa. La conversación duró 20 minutos. Yo necesito, siempre, 1/2 hora para llegar al colegio, que se encuentra a 37 metros de mi casa. En este colegio se entra todos los días a las 1500 en punto. Me fui sin desayunar. Sin embargo, llegué tarde por esa llamada de teléfono. En este colegio anotan los segundos que te retrasas. ¿Cuántos segundos me anotaron ese dichoso día de Abril?"

**** Necesitamos un detective numérico. A los dos problemas siguientes se les han borrado los datos. Se sabe cuales son, pero no dónde estaban. Juega a ser detective colocando los datos según corresponda.**

DATOS: 3 / 21 / 18 / 6 / 8 / 108 / 48

A) En..... muebles, exactamente iguales, hay un total deestanterías.

¿Cuántas estanterías hay en.....de esos muebles?

Sol.: Un dato del problema B

B) Un panadero forma dos filas de cestas de pan. Poniendo en la primera fila menos cestas que en la segunda. En la primera fila pone.....cestas con.....barras de pan en cada una de ellas y en la segunda fila pone.....cestas conbarras de pan en cada una de ellas.

¿Cuántas barras de pan hay en la primera fila de cestas más que en la segunda?

Sol.: Un dato del problema A

** Completa el enunciado, atendiendo a la resolución de sus dos preguntas.

" En el Carte Onglés todas las carteras cuestan más de 50 Euros. Una cartera de la marca _____ cuesta _____ Euros. Una cartera de la marca _____ cuesta _____ Euros más que una cartera de la marca C. Una cartera de la marca C cuesta _____ Euros. El día _____ de _____ el Carte Onglés de Noya vende _____ carteras, de las que _____ son de la marca _____ y _____ son de la marca _____ y el resto de la marca _____ "

¿Cuánto dinero se recaudó con la venta de las carteras de la marca A?

$102 + 75 = 177$; $207 - 177 = 30$; $30 \times 82 = 2.460$ Euros
Recaudó 2.460 Euros

¿Cuánto dinero recaudó el día 18 de Septiembre el Carte Onglés de Noya con las carteras que vendió de la marca B?

$62 + 7 = 69$; $102 \times 69 = 7.038$ Euros
Recaudó: 7.038 Euros

1.1 TRANSVERSALIDAD - INTERDISCIPLINARIEDAD

**Un matrimonio va al mercado. Este matrimonio tiene cuatro hijos y comen, ahora doce kilos de naranjas por semana, ni más, ni menos; sólo doce. Hay una oferta de naranjas de la clase A: Una caja de 40 kilos 38,40 Euros. Les parece una oferta interesante cuando comparan el precio de las naranjas de la clase B: Una bolsa de 8 kilos 12,80 Euros. Se sabe que las naranjas de la clase B son mejores que las naranjas de la clase A. Se sabe que las naranjas de cualquier clase duran exactamente dos semanas. Este matrimonio está indeciso, quiere tardar el mayor tiempo posible en volver a comprar naranjas y ahorrar el mayor dinero posible en la compra que hagan de naranjas. ¿Podrías aconsejarles: ¿naranjas de la clase A o naranjas de la clase B?

** Un señor nace en el año 1.890 y muere en el año 1.911 ¿Cuántos años bisiestos pudo contar en su vida?